平成２８年度フーリエ解析期末試験問題（2017.02.10）

１　次の問いに答えなさい.

（１）$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ の値を求めなさい（m,n は整数．計算の過程も残すこと）.

（２）周期関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数展開の式を書き，一般のフーリエ級数展開との関係を示しなさい.

２　次の周期関数 $f(x)$（周期 T）のフーリエ級数を求めなさい．なお、（４）は加点問題である.

（１）$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{k}{2} & (-\pi<x\le 0)\\ k & (0<x\le\pi)\end{cases}$　（$T=2\pi$）（２）$f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x\le 0)\\ x & (0<x\le 1)\end{cases}$　（$T=2$）

（３）$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi<x\le 0)\\ \sin 2x & (0<x\le\pi)\end{cases}$　（$T=2\pi$）（４）$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi<x\le 0)\\ x^2 & (0<x\le\pi)\end{cases}$　（$T=2\pi$）

３　次の問いに答えなさい.

（１）区間 $[0,\pi]$ で定義された次の関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数を求めなさい.

$$f(x)=\begin{cases}1-x & (0<x\le 1)\\ 0 & (1<x\le\pi)\end{cases}$$

（２）上で求めた級数展開にはパーセバルの等式が成立する．その理由を述べなさい.

４　次の周期関数 $f(x)$（周期 2π）の複素フーリエ級数を求めなさい.

$f(x)=\sinh x$　（$-\pi<x\le\pi$）

５　関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\omega)$ 及び逆変換を次のように定義する．以下の問いに答えなさい.

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx \quad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

（１）この定義式を用いて，複素フーリエ積分を与える式を示しなさい.

（２）$f(x)=k\ \ (|x|\le a)$，$f(x)=0\ \ (|x|>a)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\omega)$ を求めなさい.

（３）次の等式を証明しなさい.

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega x}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\sin x & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1

（1）	
（2）	
（3）	(答え) (過程)
（4）	

2

（1）	$a_0 =$ $a_n =$ $b_n =$
	(フーリエ級数)
（2）	$a_0 =$ $a_n =$ $b_n =$
	(フーリエ級数)

(3)	$a_0 =$ $a_n =$ $b_n =$
	(フーリエ級数)

3

4

(1)	

（２）	