

三次元周期変動流れに対する翼列の非定常応答*

西山哲男**, 船崎健一***

Aerodynamic Responses of Compressor and Turbine Cascades
to Three Dimensional Sinusoidal Gust

by Tetsuo NISHIYAMA and Kenichi FUNAZAKI

Unsteady responses of two dimensional aerofoil cascade to three dimensional sinusoidal gust are examined by linearized frameworks of analysis in which the steady velocity is assumed to be of a finite order but the unsteady one of an infinitesimal order of magnitude. The main results are summarized as follows: (i) The rotational part of unsteady velocity is obtained by integrating a certain relation derived from Euler's equation of motion on the orthogonal curvilinear coordinate system without treating directly the vorticity. (ii) The unsteady velocity potential of the Poisson equation is obtained numerically by applying the boundary element method to the integral equation of Fredholms type of the second kind derived from Green's theorem, and then the unsteady pressure distribution over the aerofoil and the unsteady forces are determined. (iii) Some notable interactions between the steady load of cascade aerofoil and the vorticity of a sinusoidal gust and three dimensional unsteady effects on pressure distribution and fluid forces are clarified for the compressor and turbine cascades in the sinusoidal gust of in-phase and out-phase inflows.

Key Words: Three Dimensional Gust, Unsteady Responses, Interactions Between Vorticity and Steady Load, Boundary Element Method, Unsteady Rotational Velocity, Compressor and Turbine Cascade

1. 緒 言

ターボ機械における動翼列は、上流側静翼列からの粘性後流や翼列内部流路における二次流れなどの中を回転しているため、相対流入は、円周方向のみならず、半径方向にも周期変動流れ成分が発生しているのが一般である。このような二方向に周期性をもつ三次元周期変動流れに対する動翼列の非定常応答に関する研究は、円周方向のみ周期性をもつ二次元周期変動流れに対する研究に比し、その数において極めて少ない。

三次元周期変動流れに対する非定常応答解析は、すでに平行壁間にまたがる翼列⁽¹⁾⁽²⁾や円環流路にある回転翼列⁽³⁾についてなされているが、いずれにおいても翼列に定常負荷がない上に、周期変動流れの速度振幅が境界条件を通して関与するのみで、渦度の動的効果については、触れるところがない。

一方、Goldstein⁽⁴⁾、Attassi⁽⁵⁾は、三次元周期変動流れの渦度を考慮すると、渦度成分のうち三次元流れに特有な二成分も、翼列の定常負荷と強い干渉を生ずる

ことを主張しているが、翼列について具体的な数値結果を示しておらず、現段階では、三次元周期変動流れの渦度と翼列の定常負荷との動的干渉については、知見をもつことができない。

本論文は、非粘性、非圧縮性流れにおいて定常負荷をもつ二次元翼列に三次元周期変動流れが流入する時の渦度を考慮した非定常応答解析法を提示することを目的としている。非定常速度は、定常速度に比し微小量として線形化する立場をとり、まず、非定常渦あり速度成分は、渦度を直接介することなしに、直交曲線座標の導入によるオイラー運動方程式の積分により、一方、非定常渦なし速度成分は、ポアソン方程式より得られる非定常ポテンシャルに関する積分方程式を境界要素法によって解くことにより、それぞれ求め、これから翼面上非定常圧力分布、非定常流体力を決定している。数値例を通して、圧縮機翼列とタービン翼列の非定常応答の機構やその相違に着目しながら、それぞれの翼列の定常負荷と三次元周期変動流れの渦度との干渉、非定常流体力への三次元効果、さらに二次流れ成分の影響などについて考察を行った。

2. 基 礎 式

2.1 三次元周期変動流れ 入口速度 W_1 , 流入角

* 昭和61年6月21日 東北支部秋田地方講演会において講演、原稿受付 昭和60年12月26日。

** 正員、東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻青葉)。

*** 正員、石川島播磨重工業(株) (〒190-12 東京都西多摩郡瑞穂町)。

β_1 なる流れの中を、ピッチ比 t_r 、食違い角 λ_r 、弦長 c なる動翼列が周速 U_c で回転しているものとし、座標を図1に示すようにとる。円周方向には波長 t_s 、一次モード、翼幅方向には長さ b の区間に m 次モードの無次元周波数 k の三次元周期変動流れは、座標 (X_1, Y_1, Z_1) とその単位ベクトル $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ を用いると⁽⁴⁾

$$u_{-\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[(\hat{i}' a_m + \hat{j}' b_m) \cos\left(\frac{\pi m}{b} Z_1\right) + \hat{k}' c_m \sin\left(\frac{\pi m}{b} Z_1\right) \right] \exp\left(2\pi j \frac{Y_1}{t_s \cos \lambda_s}\right) \quad (1)$$

これを動翼に固定した座標 (x, y, z) に変換し、さらに連続方程式を用いると、周期変動流れの三成分は

$$\left. \begin{aligned} u_{-\infty} &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos \lambda_s - b_m \sin \lambda_s) \cos\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \times \exp\{j(kt + k_x x + k_y y)\} \\ v_{-\infty} &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \sin \lambda_s + b_m \cos \lambda_s) \cos\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \times \exp\{j(kt + k_x x + k_y y)\} \\ w_{-\infty} &= \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{2\pi j b_m}{t_s \frac{\pi m}{b} \cos \lambda_s} \sin\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \times \exp\{j(kt + k_x x + k_y y)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに

$$k = 2\pi \frac{c}{t_s} \frac{U_c}{W_1}, k_x = -k_y \tan \lambda_s, k_y = \frac{2\pi}{t_s} \dots (3)$$

係数 a_m は、一般に上流側粘性後流の速度欠損を示しており、これのみの時は周期変動流れは、円周方向には定常角度 λ_s 、翼幅方向には軸流方向を向いている。さらに、二次流れ成分があると、係数 b_m が加わり、この時周期変動流れは、円周方向には非定常傾斜角 λ'_s 、翼幅方向には軸流方向と非定常傾斜角 λ'_b をもつことになる。

$$\lambda'_s = \tan^{-1} \frac{v_{-\infty}}{u_{-\infty}}, \lambda'_b = \tan^{-1} \frac{w_{-\infty}}{u_{-\infty}} \dots\dots\dots (4)$$

なお、区間 b の両端 $z=0, b$ では $w_{-\infty}=0$ となっている。以後、速度は入口速度 W_1 、長さは弦長 c 、時間は $\frac{c}{W_1}$ で無次元化するものとする。

2.2 三次元非定常渦あり流れの基礎式 翼列は

翼幅方向に一定形状をもち、その二次元定常速度 \vec{q}_0 (U_0, V_0) は、渦なしかつ有限量であるとする。

$$\nabla \vec{q}_0 = 0 \dots\dots\dots (5)$$

一方、三次元非定常速度 $\vec{q}_1(u, v, w)$ は、微小量で、渦

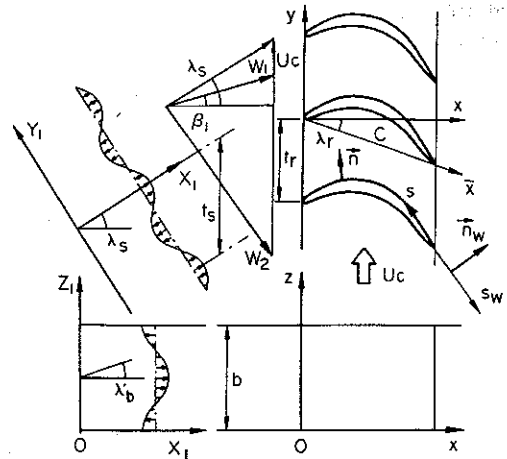


図1 翼列配置および座標系

あり速度 u^R と渦なし速度 u^{IR} の二成分から構成され、かつ後者は速度ポテンシャル ϕ から得られるとする。

$$\vec{q}_1 = u^R + u^{IR} \dots\dots\dots (6)$$

$$u^{IR} = \nabla \phi \dots\dots\dots (7)$$

さらに、オイラー運動方程式の非定常成分について線形化し、式(5)(6)を用いると、非定常渦あり速度と定常速度との関係および圧力は、それぞれ

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{q}_0 \cdot \nabla) \right\} u^R + (u^R \cdot \nabla) \vec{q}_0 = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$p = -\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{q}_0 \cdot \nabla) \right\} \phi \dots\dots\dots (9)$$

一方、式(8)の回転をとると、渦度輸送方程式は

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{q}_0 \cdot \nabla) \right\} \omega = (\omega \cdot \nabla) \vec{q}_0 \dots\dots\dots (10)$$

ここに

$$\omega = \nabla \times v^R \dots\dots\dots (11)$$

3. 非定常渦あり速度

非定常渦あり速度は、式(8)より定常速度が既知であれば求められるが⁽⁴⁾、定常負荷の大きい翼列の解析に有利な Kerschen-Balsa の方法⁽⁶⁾を用いることにする。二次元定常流れの速度ポテンシャル ϕ_0 、流線関数 ψ_0 を含む直交曲線座標系 (ϕ_0, ψ_0, z) を導入し、かつその方向の単位ベクトル $(\vec{s}, \vec{n}, \vec{z})$ を用いて、非定常渦あり速度を

$$u^R = \vec{s} u_s^R + \vec{n} u_n^R + \vec{z} u_z^R \dots\dots\dots (12)$$

とおく。式(8)をこの直交線座標系にて書き直した後、それぞれの単位ベクトルを乗じて、それぞれの方向の非定常速度成分について解くと(付録1)

$$u_s^R = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{q_0} \{ a_m \cos(\lambda_s - \beta_1) - b_m \sin(\lambda_s - \beta_1) \} \cos\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \exp\{j(kt + \alpha)\}$$

$$\begin{aligned}
 u_n^R &= \sum_{m=0}^{\infty} a_0 \left[\{a_m \cos(\lambda_s - \beta_1) - b_m \sin(\lambda_s - \beta_1)\} \frac{\partial g}{\partial \phi_0} + \{a_m \cos(\lambda_s - \beta_1) \right. \\
 &\quad \left. + b_m \sin(\lambda_s - \beta_1)\} \right] \cos\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \exp\{j(kt + \alpha)\} \\
 u_z^R &= \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{2\pi j b_m}{t_s \frac{\pi m}{b} \cos \lambda_s} \sin\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \exp\{j(kt + \alpha)\}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

ここに

$$\alpha = -k_s \{\phi_0 + g(\phi_0, \psi_0)\} + k_n \psi_0 \tag{14}$$

$$g(\phi_0, \psi_0) = \int^{\psi_0} \left(\frac{1}{q_0^2} - 1\right) d\phi_0 \tag{15}$$

かつ $k_s = k_y \sin(\lambda_s - \beta_1) / \cos \lambda_s, \quad k_n = k_y \cos(\lambda_s - \beta_1) / \cos \lambda_s$

4. 非定常渦なし速度

4.1 翼列流路内部の非定常吹出し分布 式(6)を連続方程式へ代入すると、速度ポテンシャルに関してポアソン方程式を得る。

$$\nabla^2 \phi = -\nabla \cdot \mathbf{u}^R \equiv -Q \tag{16}$$

さて、式(2)、(3)に対応して、速度ポテンシャルおよび吹出しを

$$\phi(x, y, z; t) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(x, y) \cos\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \exp(jkt) \tag{17}$$

$$Q(x, y, z; t) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x, y) \cos\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \exp(jkt) \tag{18}$$

とおくと、式(16)は各モードごとにヘルムホルツ形方程式に帰着する

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \right\} \phi_m(x, y) = -Q_m(x, y) \tag{19}$$

さて、翼列上流位置で $\phi_0 = \phi_{01}$ と指定すると、式(15)より

$$g(\phi_0, \psi_0) = \int_{\phi_{01}}^{\phi_0} \frac{d\phi_0}{q_0^2} - (\phi_0 - \phi_{01}) \equiv \bar{g}(\phi_0, \psi_0) - (\phi_0 - \phi_{01}) \tag{20}$$

式(20)の $\bar{g}(\phi_0, \psi_0)$ は、指定位置より任意位置までの微小部分の移動時間を表し、Lighthill のドリフト関数⁽⁷⁾に相当する。したがって、式(13)、(20)を用いて非定常吹出しを直交曲線座標系 (ϕ_0, ψ_0, z) で表わすと

$$\begin{aligned}
 Q_m &= q_0^2 \left[\{a_m \cos(\lambda_s - \beta_1) - b_m \sin(\lambda_s - \beta_1)\} \left\{ -\frac{2}{q_0^2} \frac{\partial q_0}{\partial \phi_0} - j \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial \phi_0^2} - j k_s \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \phi_0}\right)^2 + j k_n \frac{\partial \bar{g}}{\partial \psi_0} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \{a_m \cos(\lambda_s - \beta_1) + b_m \sin(\lambda_s - \beta_1)\} \left\{ -j k_s \frac{\partial \bar{g}}{\partial \phi_0} + j k_n \right\} - \frac{j b_m k_y}{q_0^2 \cos \lambda_s} \right] \exp(j\alpha) \tag{21}
 \end{aligned}$$

ドリフト関数 \bar{g} は、定常速度 q_0 より求まるから、式(21)より翼列内部流路における非定常吹出しを決定することができる。なお、式(21)より翼列の無限上流および下流では、それぞれ次式となる。

$$Q_m(x, y) = 0 \tag{22}$$

$$Q_m(x, y) = Q_{mw}(\psi_0) \exp\left(-j k_s \frac{\phi_0 - \phi_0^2}{q_0^2}\right) \tag{23}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 Q_{mw} &= W_2^2 \left[\{a_m \cos(\lambda_s - \beta_1) - b_m \sin(\lambda_s - \beta_1)\} \left\{ -j \frac{k_s}{W_2^4} + \frac{\partial^2 \bar{g}_w}{\partial \phi_0^2} - j k_s \left(\frac{\partial \bar{g}_w}{\partial \phi_0}\right)^2 + j k_n \frac{\partial \bar{g}_w}{\partial \psi_0} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \{a_m \sin(\lambda_s - \beta_1) + b_m \cos(\lambda_s - \beta_1)\} \left\{ -j k_s \frac{\partial \bar{g}_w}{\partial \phi_0} + j k_n \right\} - \frac{j k_y b_m}{W_2^2} \right] \exp [j \{-k_s \bar{g}_w(\psi_0) - k_n(\psi_0 - \psi_1)\}]
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

かつ、翼列下流位置で $\phi_0 = \phi_{02}$ を指定し、出口速度 W_2 を用いている。

以上から、式(21)~(23)より式(19)右辺の非定常吹出しは、翼列無限上流では零であるが、動翼列による二次元定常速度と流入する三次元周期変動流れの渦度との干渉によって発生し、翼列内部流路に存在することがわかる。

4・2 非定常速度ポテンシャルの決定 m 次モードのグリーン関数 G_m を式(19)に対応して

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right\} G_m(x, y; x', y') = -\delta(x-x', y-y') \dots\dots\dots (25)$$

によって定義すると

$$G_m(x, y; x', y') = \frac{j}{4} H_0^{(1)} \left\{ j \frac{\pi m}{b} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $H_0^{(1)}$ は第一種ハンケル関数である。さらに、翼面上および非定常随伴渦面上のそれぞれの境界条件は、図1に示すように

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial n} = -u_n^R \cdot \vec{n} \dots\dots\dots (27)$$

$$\vec{q}_1^+ \cdot \vec{n}_w = \vec{q}_1^- \cdot \vec{n}_w \dots\dots\dots (28)$$

であるから、翼間流入位相差 σ を考慮し、かつハンケル関数の無限級数にポアソンの総和公式を用いると、グリーン関数の定理から翼面上の非定常速度ポテンシャルについては、次式が成立する (付録2)。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \phi_m + \oint M_m(x, y; x', y') \phi_m ds + \int_0^\infty M_{mw}(x, y; x'_w, y'_w) (\phi_m - \phi_m) ds_w \\ & = \oint N_m(u_m^R \cdot \vec{n}) ds - \int_0^\infty N_m(u_{mw}^R - u_{mw}^+) ds_w + \iint Q_m G_m dx dy \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここに

$$M_m = I_y \frac{dx}{ds} - I_x \frac{dy}{ds}, \quad N_m = I_x \dots\dots\dots (30)$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \frac{1}{2t_r} \operatorname{sgn}(x-x') \sum_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ j(2\pi n - \sigma) H - B \sqrt{(2\pi n - \sigma)^2 + \left(\pi m \frac{t_r}{b} \right)^2} \right\} \\ I_y &= \frac{j}{2t_r} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\pi n - \sigma) \exp \left\{ j(2\pi n - \sigma) H - B \sqrt{(2\pi n - \sigma)^2 + \left(\pi m \frac{t_r}{b} \right)^2} \right\}}{\sqrt{(2\pi n - \sigma)^2 + \left(\pi m \frac{t_r}{b} \right)^2}} \\ I_z &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left\{ j(2\pi n - \sigma) H - B \sqrt{(2\pi n - \sigma)^2 + \left(\pi m \frac{t_r}{b} \right)^2} \right\}}{\sqrt{(2\pi n - \sigma)^2 + \left(\pi m \frac{t_r}{b} \right)^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

かつ $B = |x-x'|/t_r, \quad H = (y'-y)/t_r, \quad \sigma = 2\pi \frac{t_r}{t_s}$

さて、非定常圧力を式(17), (18)に対応して

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos \left(\frac{\pi m}{b} z \right) \exp(jkt) \dots\dots\dots (32)$$

とおくと、式(9)より m 次モードの非定常圧力は

$$p_m = -\rho \left(jk \phi_m + U_0 \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (33)$$

一方、後縁下流の定常岐点流線上では

$$U_0 = q_0 \frac{\partial x}{\partial s_w}, \quad V_0 = q_0 \frac{\partial y}{\partial s_w} \dots\dots\dots (34)$$

であるから、式(33)より

$$p_m = -\rho \left(jk \phi_m + q_0 \frac{\partial \phi_m}{\partial s_w} \right) \dots\dots\dots (35)$$

非定常随伴渦面の上下には、圧力差が存在しないことを利用すると、式(35)より

$$\phi_m^+(s_w) - \phi_m^-(s_w) = (\phi_m^+ - \phi_m^-)_{TE} \exp \left(-jk \int^{s_w} \frac{ds'_w}{q_0} \right) \dots\dots\dots (36)$$

これは非定常随伴渦の強さを与える。したがって、式(29)は、式(36)を用いて変数変換をすると

$$\frac{1}{2} \phi_m(\theta) + \int_0^{2\pi} M_m(\theta, \varphi) \phi_m(\varphi) d\varphi + \int_0^\infty (\phi_m^+ - \phi_m^-)_{TE} \exp \left(-jk \int^{s_w} \frac{ds'_w}{q_0} \right) M_m(\theta, s'_w) ds'_w$$

$$= \int_0^{2\pi} N_m(\theta, \varphi)(u_n^R \cdot \vec{n}) \frac{ds}{d\varphi} d\varphi - \int_0^\infty N_m(\theta, s_w)(u_{mw}^R - u_{mw}^{R+}) ds_w + \iint Q_m G_m dx dy \dots (37)$$

式(37)は、右辺が定常速度 q_0 より、既知量であるから、翼面上の非定常速度ポテンシャル ϕ_m に関する第二種のフレッドホルム形積分方程式であって、その核関数は次に示すように特異性をもたない。

$$\lim_{\theta \rightarrow \varphi} M_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{dx}{d\theta} \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2x}{d\theta^2}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \dots (38)$$

数値解法として翼面を θ について $2M$ 等分割した各要素上で非定常速度ポテンシャルの一次分布を仮定し、標点を要素中央にとると、式(37)は次のように離散化される。

$$A_{ij}\phi_{mj} = B_{1i} + B_{2i}, \quad i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, M+1 \dots (39)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \frac{\delta_{ij}}{2} + A'_{ij} + I_{wi}(\delta_{ij} - \delta_{M+1j}) \\ A'_{ij} &= \int_0^{2\pi} M_m(\theta_{2i}, \varphi) d\varphi \\ I_{wi} &= \int_0^\infty M_m(\theta_{2i}, s'_w) \exp\left(-jk \int_{q_0}^{s'_w} ds'_w\right) ds'_w \\ B_{1i} &= \int_0^{2\pi} N_m(\theta_{2i}, \varphi)(u_n^R \cdot \vec{n}) \frac{ds}{d\varphi} d\varphi - \int_0^\infty N_m(\theta_{2i}, s'_w)(u_{mw}^R - u_{mw}^{R+}) ds'_w \\ B_{2i} &= \iint Q_m G_m(\theta_{2i}; x-x', y-y') dx dy \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

かつ、 δ_{ij} はクロネッカデルタである。

なお、翼後縁におけるクッタの条件は、翼面上の定常渦分布 γ_0 を用いると

$$jk\phi_1 + \gamma_{01} \left. \frac{\partial \phi_m}{\partial s} \right|_1 - \left(jk\phi_{M+1} + \gamma_{0M+1} \left. \frac{\partial \phi_m}{\partial s} \right|_{M+1} \right) = 0 \dots (41)$$

したがって、最終的には、非定常速度ポテンシャルの離散値 ϕ_{mi} に関する $(M+1)$ 元連立方程式が得られる。

5. 非定常流体力

翼面上の定常速度は、定常渦分布 γ_0 を用いると

$$U_0 = \gamma_0 \frac{dx}{ds}, \quad V_0 = \gamma_0 \frac{dy}{ds} \dots (42)$$

で与えられるから、翼面上の非定常圧力分布は、式(33)より

$$p_m = -\rho \left(jk\phi_m + \gamma_0 \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \dots (43)$$

したがって、非定常流体力および原点まわりのモーメントは

$$\left. \begin{aligned} F_{mx} &= - \int_0^{2\pi} p_m(\theta) \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ F_{my} &= \int_0^{2\pi} p_m(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

$$F_{mM} = \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dx}{d\theta} + y \frac{dy}{d\theta} \right) p_m(\theta) d\theta \dots (45)$$

6. 定常負荷がない翼列

特殊な場合として、定常負荷のない平板翼列については、非定常吹出し分布が式(21)より存在しないので簡単になる。式(19)より m 次モードの非定常速度ポテンシャルは、翼間流入位相差 σ を考慮すると、グリーンン定理より

$$\phi_m(x, y) = \int M_m(x-\xi, y-\eta) \{ \phi_m^+(\xi) - \phi_m^-(\xi) \} d\xi \dots (46)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} M_m &= \frac{j}{4} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial \eta} H_0^{(1)} \left(j \frac{\pi m}{b} r_\nu \right) \\ r_\nu &= \sqrt{(x-\xi-\nu B)^2 + (y-\eta-\nu H)^2} \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

一方、非定常渦あり速度の法線成分は

$$u_n^R = \sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}^R \cos\left(\frac{\pi m}{b} z\right) \exp(jkt)$$

ここに

$$u_{nm}^R = \{ a_m \sin(\lambda_s - \beta_1) + b_m \cos(\lambda_s - \beta_1) \} \times \exp(-jk_s x + jk_n y) \dots (48)$$

となるので、平板翼上の境界条件は

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial y} + u_{nm} = 0 \dots (49)$$

したがって、式(46)、(48)を式(49)へ代入することにより、非定常ポテンシャルの不連続量 $\phi_m^- - \phi_m^+$ に関する第一種フレッドホルム形積分方程式が得られ、これは Jones の方法⁽⁸⁾によって解くことができる。これよ

り非定常圧力差分布および非定常揚力は

$$p_m^-(x) - p_m^+(x) = -\rho \left\{ jk_s (\phi_m^- - \phi_m^+) + \frac{\partial}{\partial x} (\phi_m^- - \phi_m^+) \right\} \dots \dots \dots (50)$$

$$L_m = \int_0^c \{ p_m^-(x) - p_m^+(x) \} dx \dots \dots \dots (51)$$

7. 数値計算結果と考察

翼列内部流路における二重積分 B_{2i} は、直交曲線座標系 (ϕ_0, ψ_0, z) を用いて行われ、微分は直交格子を用いた中心差分によった。翼面上の標点数は 60、翼列内部流路の分割数は 71×23 として数値解析を行った。なお、三次元性を明確にするために、二次元の場合 ($m/b=0$) を、また定常負荷効果を明らかにするために、定常負荷のない平板翼列をそれぞれ比較参考を示してある。

7.1 圧縮機翼列 図 2 には、節弦比 1.0、食違い角 30° の圧縮機翼列〔翼形は NACA 65(8)10〕について、流入角 45° の時の二次元定常流れの翼間流路における等ポテンシャル線と流線の分布および (ϕ_0, ψ_0) 面の直交格子を示してある。

図 3 には、翼間流路内における等速度線とドリフト

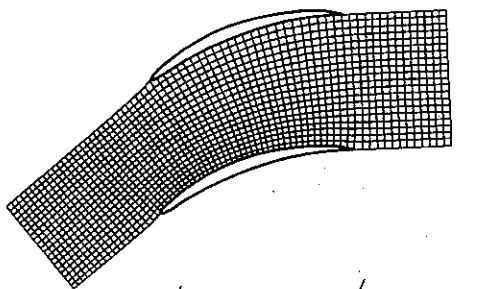


図 2 物理面の等ポテンシャル線と流線(上) 写像面 (ϕ_0, ψ_0) における直交格子(下)

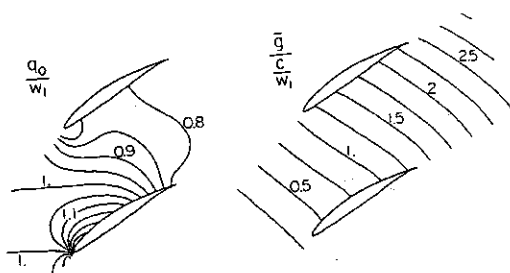


図 3 等速度線とドリフト関数の等値線分布

関数の等値線の例を示してある。ドリフト関数の等値線の間隔は、背面側増速部では拡大、腹面側減速部では縮少の傾向が見られるが、全般的には大きなひずみは、みられない。不均一な二次元定常流れ場を、過度をもつ三次元周期変動流れが運搬されると、その振幅、波長、伝播方向が変化するために、翼列上流でソレノイダルである性格が次第に失われ、これに伴い非定常吹出しが翼間流路内に発生する。周期変動流れの流入周波数を一定 ($k=9.95$) に保ち、ピッチ比を 0.5 (反位相流入)、1.05 (ほぼ同位相流入) の二種について示した図 4 には、この様相が明らかに表れ、特に翼間流路後半より下流には、ほぼ規則的に非定常吹出し分布が存在していること、また反位相流入のほうが同位相流入に比し、非定常吹出し分布の強さがつよいことなどがわかる。

さて、モード次数 m と翼幅方向区間長さ b との比 m/b は、翼幅方向の非定常速度こう配を示し、これは非定常随伴渦発生の一因となるので、以下これを三次元パラメータと称することにする。図 5 には、三次元パラメータによる翼弦上の非定常圧力差分布を示してある。翼形状や定常負荷が考慮されているため、翼弦方向の変化は複雑になるが、一般に三次元パラメータが大きくなるほど、振幅の減少がみられる。これは定常負荷を考慮しない周期変動流れについての既存結果⁽¹⁾と同一傾向にある。なお、二次元値に比し、三次元パラメータが増すほど、減少しており、三次元性が著しくなることを示している。

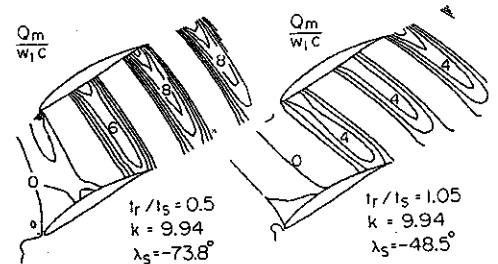


図 4 翼間流路および下流における非定常吹出し分布

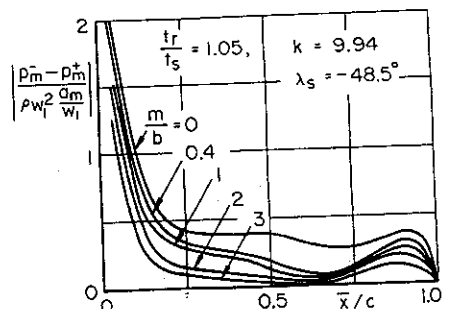


図 5 非定常圧力差の振幅分布

図6には、同一の流入周波数を持ち、流入位相差の異なるピッチ比0.5と1.05をもつ周期変動流れについて、非定常揚力の三次元パラメータによる変化を示してある。変動振幅は、三次元パラメータが小さい範囲では、反位相流入のほうが同位相流入に比し、大きい。三次元パラメータが大きくなるとともに、その差がなくなるのは、非定常随伴渦効果が強まるためである。なお、定常負荷を考慮しない解析結果は、三次元パラメータの小さい範囲では、変動振幅を過大に、大きい範囲では、過小に、また位相おくれを過大に、それぞれ評価することがわかる。

7.2 タービン翼列 図7には、節弦比0.584、食違い角 20° のタービン翼列(翼形形状は省略⁽⁹⁾)について、流入角 20° の時の定常流れの等ポテンシャル線と流線の分布を、さらに、これに対応して図8には、翼

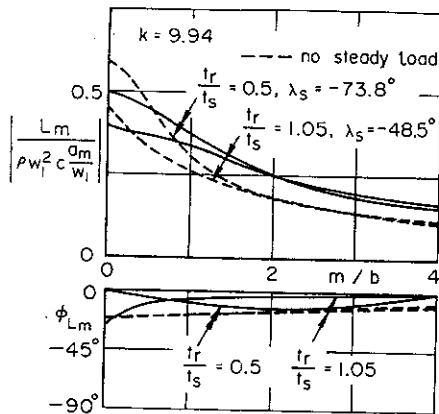


図6 非定常揚力の三次元パラメータによる変化

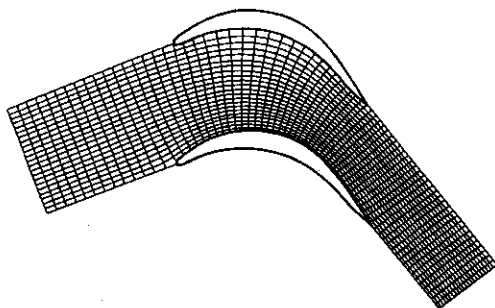


図7 物理面の等ポテンシャル線と流線の分布

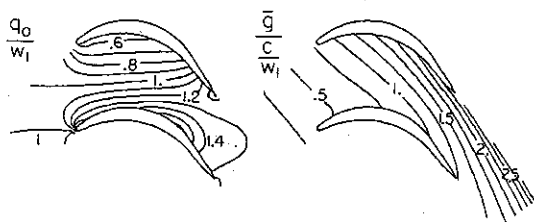


図8 等速度線とドリフト関数の等値線

間流路内における等速度線およびドリフト関数の等値線の分布を示してある。タービン翼列では、流れの増速と転向が大きく、かつ腹背面の速度差も大きいため、圧縮機翼列に比し、二次元定常流れの不均一性がつよい。この結果、流入する周期変動流れのもつ渦度との著しい干渉によって発生する非定常吹出し分布は、図9に示すように、翼間流路内における変化が激しく、規則性もうすらいでいるうえ、非定常吹出しの強さも激増している点は、圧縮機翼列との顕著な相違で、タービン翼列における重大な干渉効果を示すものである。

図10には、反位相流入の周期変動流れに対するタービン翼表面上の非定常圧力分布を示してある。二次元値に比し、三次元パラメータの増加とともに、圧力振幅は、背面側では、一般に減少するが、特に前縁直後で著しく、かつ背面に沿う変化も激しくなっている。一方、腹面側では、前半部で減少するが、反対に後半部では増加し、最大値をもっている。また、三次元パラメータが大きくなると腹背面上の圧力振幅の差は、減少している。

図11には、周速を一定にし、流入位相差の異なるピッチ比0.5と1.05をもつ周期変動流れについて、非定常流体力の三次元パラメータによる変化を示して

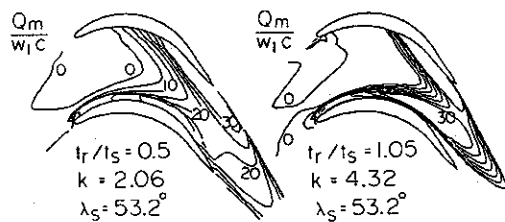


図9 翼間流路および下流における非定常吹出し分布

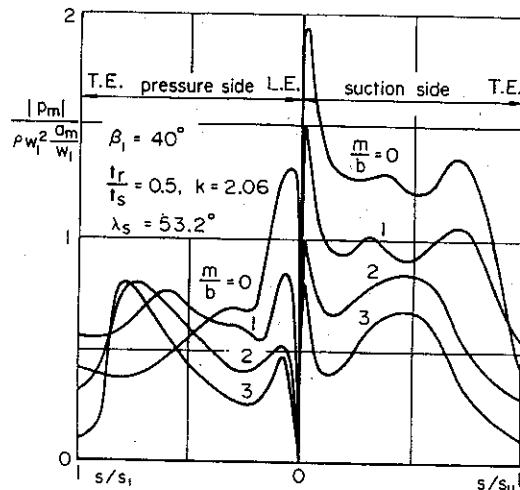


図10 翼面上の非定常圧力の振幅分布

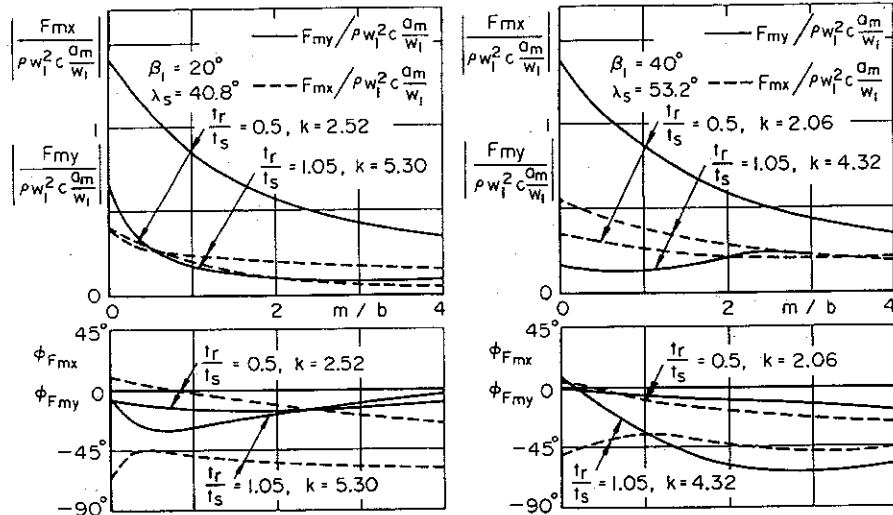


図 11 非定常揚力の三次元パラメータによる変化

ある。反位相流入では、振幅は周方向成分が軸方向成分に比し、極めて大きい、位相には、著しい相違はない。一方、同位相流入では、両成分とも振幅はほぼ同一で、位相には差がみられ、後者がおくれている。また、流入角が 20° より 40° に増加すると、反位相流入では、振幅が両成分ともわずか増す程度であるのに比し、同位相流入では、周方向成分の減少と軸方向成分の増加が目立ち、これは三次元パラメータの小さい領域で顕著である。同位相流入では、図 9 に明らかなように、周期変動流れの流入周波数が大きくなり、非定常吹出し分布の場所的变化が著しくなっているのが一つの理由として挙げられる。いずれの場合も、二次元値に比し、三次元パラメータの増加とともに、振幅は減少し、位相はおくれて、全般的に三次元性は強まってくる。

二次流れ成分があると、式(4)に示すように、周期変動流れは、円周、軸流のいずれの方向にも、非定常傾斜角をもつにいたる。図 12 には、反位相流入の周期変動流れについて、二次流れ成分を含んだことによる非定常流体力を示してある。 b_m/a_m が増加すると、円周、軸流方向成分はいずれも、振幅は増加するが、前者は後者と比し、大きい。一方、 b_m/a_m が負になると、円周方向成分は減少するのに比し、軸流方向成分は増加して、前者より大きくなる。また、二次流れ成分を含まない場合 $b_m/a_m=0$ と比較すると、非定常流体力は、 b_m/a_m が正の時は振幅が増加、位相は進むのに比し、負の時は正反対となっており、全般的に二次流れ成分の影響が強いことを示している。

8. 結 言

三次元周期変動流れが二次元翼列へ流入する時の非

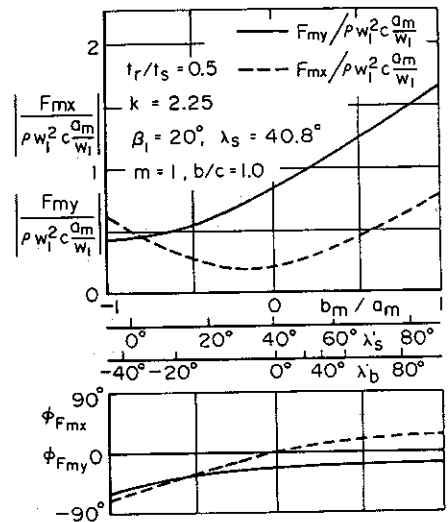


図 12 非定常流体力に及ぼす二次流れ効果

定常応答について、定常速度と有限量、非定常速度を微小量とする立場から、線形解析法を構成するとともに、数値例によって翼列の非定常応答における三次元効果を明らかにした。主要な結果を要約すると、次のようになる。

- (1) 非定常渦あり速度は、オイラー運動方程式より得られる関係を、直交曲線座標系の導入による積分から求める方法を提示した。これは、渦度を直接介する必要がない。
- (2) ポアソン方程式に基づき、非定常速度ポテンシャルは、グリーン定理から翼面上で得られる第二種フレッドホルム形積分方程式の境界要素法による解として求められ、さらに、これより非定常圧力分布、非定常流体力を決定する解析法を示した。
- (3) 数値例を通して、翼列の定常負荷と三次元周

期変動流れの渦度との干渉を示す非定常吹出し分布の特徴を指摘するとともに、同位相と反位相流入の二種の周期変動流れが誘発する非定常圧力分布および非定常流体力について、三次元パラメータの影響を検討することにより、総括的な三次元効果を明らかにした。また、圧縮機翼列とタービン翼列の非定常応答の本質的相違とその原因を明らかにした。

付 録 1

式(8)の各項に \vec{s} を乗じ、非定常渦あり速度の流線方向成分をとると

$$\frac{\partial u_s^R}{\partial t} + [(\vec{q}_0 \cdot \nabla) u^R]_s + [(u^R \cdot \nabla) \vec{q}_0]_s = 0$$

これは次式

$$\frac{\partial}{\partial t} u_s^R + q_0^2 \frac{\partial u_s^R}{\partial \phi_0} + u_s^R q_0 \frac{\partial q_0}{\partial \phi_0} = 0$$

となるから、これに q_0 を乗ずると

$$\frac{\partial}{\partial t} (q_0 u_s^R) + q_0^2 \frac{\partial}{\partial \phi_0} (q_0 u_s^R) = 0$$

この積分により u_s^R が式(13)のように求められる。 u_n^R , u_z^R も同様にして求められる。

付 録 2

グリーン定理より、一般に

$$\phi_m = \oint \left(G_m \frac{\partial \phi_m}{\partial n} - \phi_m \frac{\partial G_m}{\partial n} \right) ds + \int Q_m G_m dx dy$$

となるが、翼面および随伴渦面を囲む閉回路を積分路にとると、右辺第一項は

$$\frac{\phi_m}{2} - \oint \left(G_m \frac{\partial \phi_m}{\partial n} - \phi_m \frac{\partial G_m}{\partial n} \right) ds + \int_0^\infty \left[G_m \left(\frac{\partial \phi_m^-}{\partial n_w} - \frac{\partial \phi_m^+}{\partial n_w} \right) - \frac{\partial G_m}{\partial n_w} (\phi_m^- - \phi_m^+) \right] ds_w$$

これに翼面および随伴渦面上の境界条件を代入すると、式(29)となる。

文 献

- (1) 西山・小林, 機論, 43-370 (昭52), 2175.
- (2) 菊地, 機論, 46-412, B (昭55), 2247.
- (3) 難波, 機論, 43-367 (昭52), 975.
- (4) Goldstein, M. E., *J. Fluid Mech.*, 89-3 (1978), 423.
- (5) Attassi, H., *Symp. Aeroelasticity in Turbomachines Juris-Verlag*, (1981), 383.
- (6) Kerschen, E. J. and Balsa, T. F., *AIAA J.*, 19-10 (1981), 1367.
- (7) Lighthill M. J., *J. Fluid Mech.*, 1 (1956), 601.
- (8) Jones, W. P. and Moore, J. A., *AIAA J.*, 14-5 (1976), 601.
- (9) 西山・ほか2名, 機論, 50-459, B (昭59), 258.

討 論

〔質問〕 植 西 晃

(株)日立製作所機械研究所

三次元周期変動流れに対する動翼列の非定常応答に関して、圧縮機翼列と定常負荷の大きいタービン翼列について統一的に解く方法を示されたことに對し敬意を表す。

(1) 図4と図9の非定常吹出し分布において、 Q_m/Wic のモード次数 m はどのような値の場合なのかお伺いしたい。

また、圧縮機翼列において非定常吹出し分布の強さがつよい反位相の場合(図4)は、当然変動振幅が大きくなっている(図6)。これに對し、タービン翼列(図9)では一見同位相の場合のほうが吹出し分布の強さがつよいように見受けられるのに、変動振幅では反位相のほうが大きい。パラメータ k や λ_s の違いによるものなのか、あるいは非定常速度は定常速度に比し微小量であるとして線形化したことに起因するものなのか、その他の理由によるものなのか、ご意見をお伺いしたい。

〔回答〕 (1) 図4と図9の非定常吹出し分布のモード次数は $m=0$ の場合を示している。この場合には非定常吹出しは翼幅方向に変化しないため、周期変動流れと翼の定常負荷との干渉効果を明らかにするのに適当であると考えている。

(2) 非定常吹出し分布は非定常速度ポテンシャルの決定に関与しており、さらにこの非定常速度ポテンシャルを通して非定常流体力が求められている。

さて、積分方程式(29)に明らかのように、非定常速度ポテンシャルは単に非定常吹出しのみならず、翼列条件、翼形状、周期変動流れの流入位相差にも依存しているので、非定常吹出しの強さのみから直ちに非定常流体力の大小を論ずることは適当でないとお考えいただきたい。

具体的には、図4の圧縮機翼列では同一無次元周波数において定常角度 λ_s が、また図9のタービン翼列では同一定常角度 λ_s において無次元周波数がそれぞれ異なっている。このため、それぞれの非定常吹出し分布の強さと分布傾向に相違が生じたのであるが、い

ずれの翼列の場合にも非定常流体力は反位相の場合が同位相の場合より大きい。これは積分方程式(29)の核関数に明らかなように、流入位相差の影響が極めて強く、最終的にはこの流入位相差の相違が非定常流体力に大きく関与しているためである。このことは二次元

周期変動流れについて著者らが行った理論解析(付1)や風洞実験結果(付2)とも同一傾向にある。

(付1) 西山・船崎, 機論, 50-454, B (昭59), 1476.

(付2) 西山・船崎, 機論, 52-475, B (昭61), 1005.
