

流路内吹出し分布法による翼列まわり圧縮性流れ解析法の改良*

船崎 健一*

Blade-to-Blade Compressible Flow Analysis by the Modified Field Singularity Method

Ken-ichi FUNAZAKI

Compressible flow analysis in turbine cascades was carried out by the use of the modified field singularity (sink/source) method that was originally developed by Van den Braembussche. This method has many noteworthy features: simplicity, compactness of program size and small memory size, all of which allow the program to run even on a desk-top personal computer. A comparison is made between experimental data or calculations of another numerical method (Denton method) and the results obtained with the proposed method in this paper, which shows its capability for subsonic blade-to-blade flow analysis.

Key Words : Compressible Flow, Cascade, Singular Point Method, Sink/Source

1. 緒言

本論文では、Van den Braembussche⁽¹⁾により提示された、拡張された特異点法による翼列まわり圧縮性流れ解析法の改良を行い、計算結果と実験結果との比較によりその有効性を示す。

Van den Braembusscheの手法は、特異点法による翼列まわり非圧縮流れ解析の結果を初期値とし、翼間流路中微小要素内の体積流量変化分に相当する吹出しを流路内に分布させ、圧縮流れ解析を逐次近似的に行うものである。計算流体力学が著しい進歩を遂げた今日では、高出口マッハ数の場合の収束の悪化などの難点もあって広く利用されている状況にはない。しかし、コーディングの容易さ、計算容量の少なさなど利点も多く、さらに、境界層解析プログラム⁽²⁾との組み合わせも比較的簡単であるため、翼列の空力設計や冷却翼設計への利用も十分に期待できる。

上記のような背景に加え、本論文でVan den Braem-

bussche法の改良を提示する理由としては、著者が先に示した非圧縮三次元周期変動流れに対する翼列の非常応答解析⁽³⁾の圧縮流れへの拡張に際し、同手法がその定常流解析に有効であると判断されたためである。

記号

- a : 局所音速
- C : 翼コト長さ
- Ca : $\sqrt{Cax, Cay}$ 平均速度 (= (Cax, Cay))
- fx, fy : 影響関数
- in, o : 微小要素入口、出口
- M : マッハ数
- n : 反復回数
- ni : 法線方向マッハ
- Δn : 微小要素平均高さ
- Q : 吹出し強さ総和
- Qm : 微小要素内吹出し強さ (式(5)または(8))
- t : ピッチ
- Ws : 流線方向速度
- β : 流入角、流出角
- κ : 比熱比
- γ : 翼面上渦強さ

* 原稿受付 平成元年11月6日。

*1 正員、岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5)。

2. 基礎式

2.1 Van den Braembusscheの方法 二次元定常渦無し流れの基礎式は速度ポテンシャル ϕ を用いて次のように表される。

$$\nabla^2 \phi = \nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi) / (2a^2) \equiv F(x, y, \nabla \phi), \quad a: \text{局所音速} \quad (1)$$

式(1)の右辺Fを既知と考えると、式(1)は流れ場にFの強さの吹出し分布が存在する場合のPoissonの式となり容易に解ける。しかし実際にはFは未知であるため、そこでVan den Braembusscheの方法を用いこれを反復的に解く。即ち、ある初期値 $\phi^{(0)}$ (非圧縮流での解)からFを算出し圧縮流の速度ポテンシャルの近似解 $\phi^{(1)}$ を得る。これを用いて再びFの値を求め次の近似解 $\phi^{(2)}$ を得る。この操作を取束解が得られるまで繰り返す。なおこの方法では、Poissonの式の解法として翼面上には渦のみを分布するMartensen流の特異点法⁽⁴⁾を用い、Fの効果については、流路内に離散的に分布させた吹出しによってそれを表す。そこで次に、この離散吹出し強さについて検討する。

2.2 流路内吹き出し強さ 式(1)のFは、圧縮流中の流線上の関係式を用いて次のように表せる。

$$F = W_s \partial (W_s^2) / \partial s / (2a^2) \quad (2)$$

W_s : 流線(s)方向速度

実際の計算では圧縮流中の流線自身が未知であるので、式(2)を非圧縮流の流線(s_1)上での関係式を用いて書き直す。

$$F = \{ W_s \partial (W_s^2 + W_n^2) / \partial s_1 + W_n \partial (W_s^2 + W_n^2) / \partial n_1 \} / (2a^2) \quad (3)$$

ここで、 W_n は s_1 上で与えられる圧縮流速の法線方向(n_1)成分である。圧縮流と非圧縮流での流線がなす角度が十分小さいと考えると、 W_n は無視することができ、結局

$$F = W_s \partial (W_s^2) / \partial s_1 / (2a^2) \quad (4)$$

翼間流路内をいくつかの流線を用いて図1のような微小要素に分割し、その微小要素内流れ方向に式(4)の吹出し分布Fを面積分すると、音速aを要素内で一定と考えた場合(局所線形化)、次の要素内吹き出し強さを得る。

$$Q_m = \int F ds_1 dn_1 = \Delta n (W_{s,o} - W_{s,in}) (M_o^2 + M_{oMin} + M_{in}^2) / 3 \quad (5)$$

$\Delta n = (\Delta n_{in} + \Delta n_o) / 2$

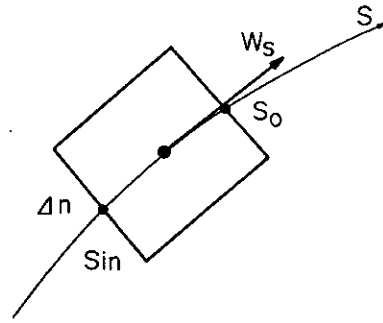


図1 微小要素

ここで、 Δn は要素内平均流管高さである。要素入口及び出口マッハ数 M_{in}, M_o はそれぞれ速度 $W_{s,in}, W_{s,o}$ から次式で計算される。

$$M_o^2 = 2 / [(W_{s,o}/W_s)^2 / \Lambda_1 - (\kappa - 1)] \quad (6)$$

$$\Lambda_1 = M_{in}^2 / [(\kappa - 1) M_{in}^2 + 2] \quad (7)$$

W_s, M_i は翼列入口速度、マッハ数、 κ は比熱比である。

なお、式(5)は文献(1)の吹出し強さと一致する。次に、要素内の速度変化が線形的に変化すると仮定して要素内積分を行うと、この吹出し強さが式(8)で与えられる。

$$Q_m = -2 \Delta n W_{s,in} \left\{ (k-1) + \frac{b}{2} + \ln \frac{(k-b)(1+b)}{(k+b)(1-b)} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $k = W_{s,o}/W_{s,in}$, $b = (\kappa - 1) M_{in}^2 / 2$ である。

式(5)および(8)による吹出し強さ $Q_m' = Q_m / \Delta n$ の比較を、微小要素入口マッハ数0.3と0.9について表1に示す。これからわかるように、要素入口のマッハ数が高いほど、また要素内での速度の変化が大きいかほど両式で与えられる吹出し強さが異なる。しかし、要素を十分小さくとればいずれの式によってもほぼ同程度になり、実際上ほとんど差が生じないことが確認された。そこで以下では式(8)によって吹出し強さを算出する。

2.3 特異点法による定式化 式(1)をFが既知であるとして特異点法により解く。ここで、翼面上に渦のみを分布するMartensen法⁽⁴⁾を用いる。翼面上渦 γ 、流路内吹出し分布Fによる誘起速度は、 $C_a = (C_{ax}, C_{ay})$ をベクトル平均速度として次式で与えられる。

$$C_x = C_{ax} + \int \gamma(s') f_x(z - \zeta) ds' + \iint F(\xi, \eta) f_y(z - \zeta(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (9)$$

$$C_y = C_{ay} + \int \gamma(s') f_y(z - \zeta) ds' - \iint F(\xi, \eta) f_x(z - \zeta(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (10)$$

k	Qm'from(5)	Qm'from(8)
1.01	0.90016 x	0.90919 x
1.02	1.80063	1.83691
1.03	2.70140	2.78334
1.04	3.60245	3.74869
1.05	4.50377	4.73315
1.06	5.40536	5.73693
1.07	6.30719	6.76023
1.08	7.20927	7.80320
1.09	8.11157	8.86610
1.10	9.01410	9.94911

(a) Min = 0.3

k	Qm'from(5)	Qm'from(8)
1.01	0.811297 x	0.819464 x
1.02	1.625125	1.658066
1.03	2.441396	2.516122
1.04	3.260024	3.393957
1.05	4.080926	4.291898
1.06	4.904024	5.210277
1.07	5.729240	6.049435
1.08	6.556502	7.109715
1.09	7.385739	8.091469
1.10	8.216884	9.095051

(b) Min = 0.9

表1 吹出し強さの比較

$$f_x = -\sin(Y) / (\cosh(X) - \cos(X)) / (2t)$$

$$f_y = \sinh(Y) / (\cosh(X) - \cos(X)) / (2t)$$

$$X = 2\pi(x-x')/t, Y = 2\pi(y-y')/t$$

ここで、式(9)(10)を次の翼面上接線流れの条件式⁽⁵⁾

$$\gamma = C_x dx/ds + C_y dy/ds \quad (11)$$

に代入し、翼面上渦分布 γ に関する第二種Fredholm型積分方程式を得る。なお、ここで得られた積分方程式はVan den Braembusscheが誘導した式(第一種Fredholm型)と比べ未知数の数も少なく、なおかつ十分な計算精度を有することが特徴である。

$$\frac{\omega(\theta)}{2} + \int [K(\theta; \xi, \eta) + \frac{dy}{2td\theta}] \omega(\phi) d\phi$$

$$= - \left(\frac{dx}{d\theta} \cos\beta_1 + \frac{dy}{d\theta} \sin\beta_1 \right) - \int [H(\theta; \xi, \eta) + \frac{dx}{d\theta}] q(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (12)$$

ここで、

$$x = x(\theta), y = y(\theta)$$

$$\omega(\theta) = \gamma(\theta) (ds/d\theta) / W_1$$

$$q(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) / C^2 W_1$$

$$K(\theta, \phi) = \frac{(dy/d\theta) \sinh(X) - (dx/d\xi) \sin(Y)}{2t [\cosh(X) - \cos(Y)]} \quad (13)$$

$$H(\xi, \eta) = \frac{(dx/d\theta) \sinh(X) + (dy/d\xi) \sin(Y)}{2t [\cosh(X) - \cos(Y)]} \quad (14)$$

式(12)の導出に対しては、無限上流の条件を固定するため次の関係式を考慮した。

$$x \rightarrow \infty \quad (f_y(z-\xi) \rightarrow -1)$$

$$C_x \rightarrow C_{ax} - \int F(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (15)$$

$$C_y \rightarrow C_{ay} - \int \gamma(s') ds' \quad (16)$$

3. 数値解析

3.1 離散化 式(12)の離散化に際し、渦分布に関しては西山、矢野目が行った解析⁽⁶⁾と同様の手法を使用し、流路内吹出しの項については2.1での考察より、微小要素の重心(図1)に配置した集中吹出し Q_m (式(5)または(8)で与えられる)で評価する。結局、

$$\sum A_{ij} \omega_j^{(n)} = B_i + \sum H_{ik} Q_m k^{(n-1)} \quad (17)$$

(i=1, ..., M)

ここで、 n は反復回数を表す。即ち、最新の渦分布 $\omega_j^{(n)}$ は、固定された入口条件(B_i に相当)と、前回の速度分布より計算される吹出し分布 $Q_m k^{(n-1)}$ とから決定される。

3.2 計算格子 流路内の吹出し分布を計算するためには、流線に基づく計算格子の適正な生成が必要である。ここでは、著者が翼列の非定常流解析に用いた流線と等ポテンシャルとからなる計算格子⁽⁷⁾を用いる。これにより速度の流線方向勾配に対応した格子の生成が自動的に行われ、かつ、微小要素の入口、出口面と流れとの直交性が得られ、吹出し強さの評価精度低下が抑制される。

図2に本論文の計算に使用した翼列⁽⁷⁾を、図3には計算格子例を示す。計算領域は翼間流路から翼列上下

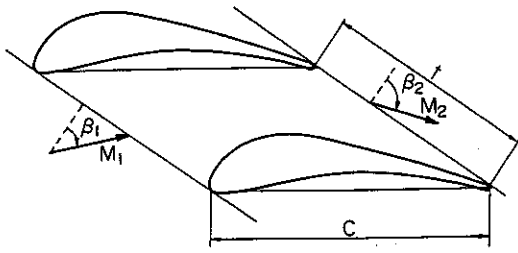


図2 翼列配置

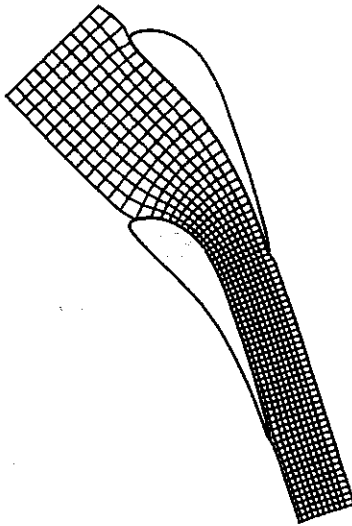


図3 計算格子例

$$u = \sum \gamma_j (\sin \alpha_{j,j} L_{r,j} - \cos \alpha_{j,j} Pr_{j,j}) \quad (18)$$

$$v = -\sum \gamma_j (\cos \alpha_{j,j} L_{r,j} + \sin \alpha_{j,j} Pr_{j,j}) \quad (19)$$

$$L_{r,j} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[\cosh(X_{j+1}) - \cos(Y_{j+1})]}{[\cosh(X_j) - \cos(Y_j)]} \quad (20)$$

$$Pr_{j,j} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sn} \phi_j \operatorname{cs} \phi_j - \operatorname{cs} \phi_j \operatorname{sn} \phi_j}{\operatorname{cs} \phi_j \operatorname{cs} \phi_j + \operatorname{sn} \phi_j \operatorname{sn} \phi_j} \right) \quad (21)$$

$$\operatorname{sn} \phi_j = \cosh(X_j/2) \sin(Y_j/2) / R_j$$

$$\operatorname{cs} \phi_j = \sinh(X_j/2) \cos(Y_j/2) / R_j$$

$$R_j = [(\cosh(X_j) - \cos(Y_j)) / 2]$$

$$\alpha_j = \arctan [(\eta_{j+1} - \eta_j) / (\xi_{j+1} - \xi_j)]$$

$$X_j = 2\pi(x - \xi_j) / t, \quad Y_j = 2\pi(y - \eta_j) / t$$

(記号については図4参照のこと)。

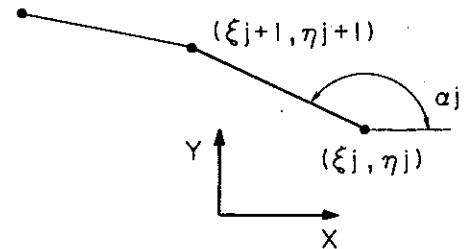


図4 パネル法

流にそれぞれ約1比7で拡張された範囲をとった。予備計算の結果、流れ方向に36個、その直交する方向に6個の合計216個以上の要素数で、得られる解に大きな差が生じないことが確認された。また、翼面上の分割数(すなわち、未知の渦強さの数)は120個とした。

3.3 流速計算 流路内吹出し強さを更新するため、連立方程式(17)より得られる渦分布 γ_j と吹出し分布 $Q_m, k^{(m)}$ から各要素上の速度分布を計算する。その際従来の翼面上集中渦による誘導速度の計算法では、その影響関数の特異性のため、翼面近くに位置する格子点上での速度の計算誤差が大きくなるおそれがある。そこで、翼面近傍においても特異性の生じないパネル法(6)(一定強さの渦分布)を用いる。これによる誘導速度(u^*, v^*)は次式で与えられる。

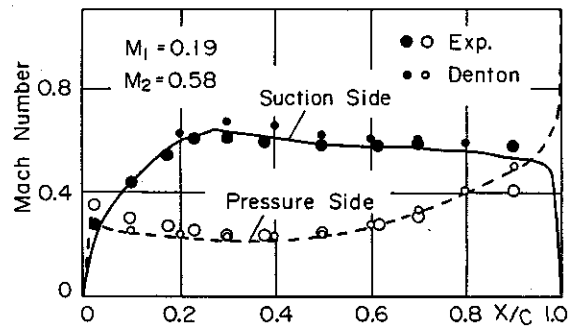


図5 翼面マッハ数分布 (M1=0.19, M2=0.58)

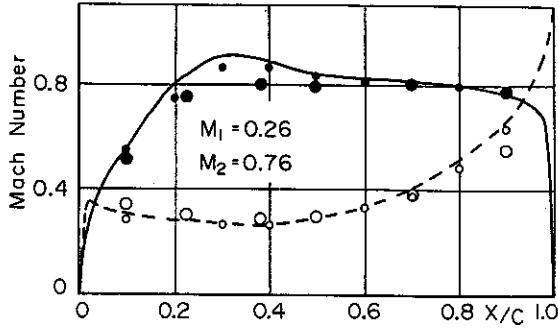


図6 翼面マッハ数分布 (M1=0.26, M2=0.76)

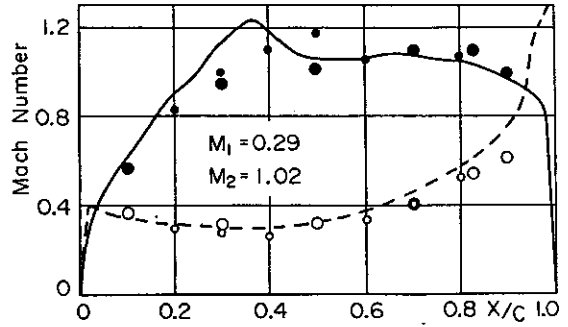


図8 翼面マッハ数分布 (M1=0.29, M2=1.02)
(計算を途中で打ち切った場合)

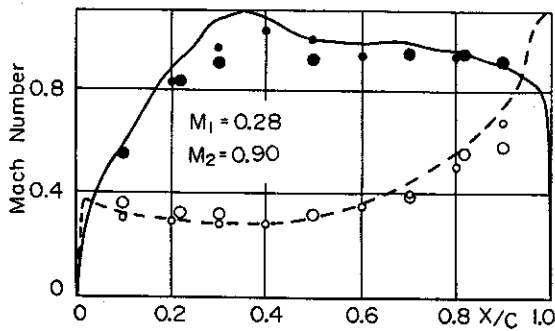


図7 翼面マッハ数分布 (M1=0.28, M2=0.90)

3.4 収束判定 本解析では収束判定の対象として、密度変化に伴う軸流速度変化分に相応する微小要素内の吹出し強さの総和 $Q = \sum Q_m$ を用い

$$| (Q^{(n+1)} - Q^{(n)}) / Q^{(n)} | < 0.01 \quad (22)$$

をもって収束と判定した。なお、翼面速度分布を収束判定に用いた結果でもほぼ同じ結果が得られている。

3.5 数値計算例 はじめに同一の翼列について、入口マッハ数を0.19から0.28まで変化させていった場合の翼面マッハ数分布について、実験結果⁽⁷⁾と本解析法による結果との比較を行った。その結果について図5~7に示す。ここで、断熱出口マッハ数は0.58~0.90でほぼ亜音速状態である。なお、各図には二次元Denton法⁽⁸⁾による計算結果も併記されている。本計算結果は翼前半背面側で実験値よりも高めのマッハ数を与えているが、これには半径方向流管高さの変化が関係していると考えられ⁽⁸⁾、この点を除けば全般的に良い一致を示していると言える。また、Denton法とは背面側のオ-ハ-ズピ-ットの点も含めほぼ同じ結果となっている。さらに入口マッ

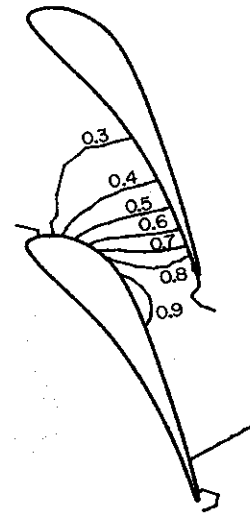


図9 等マッハ線図 (M1=0.26, M2=0.76)

ハ数を0.29にまであげたとき、計算が収束しなかった。本解析法では一般に高亜音速域で解の収束が遅くなるが (Van den Braembussche⁽¹⁾は局所的に音速を越えると、計算が収束しないと述べている)、実験結果は出口マッハ数がほぼ1.0で遷音速流れであり、解析法の適用範囲を越えたためと考えられる。

ここで、本解析法の高亜音速流れへの拡張のための一つの試みとして、あらかじめ出口マッハ数を指定しておき、計算で得られた出口マッハ数がこの指定値を上回った時点で計算を打切る、という便法を上述の問題に適用した。その結果を図8に示す。図中翼面背面でのマッハ数ピークの位置が若干前方にあるが、Denton法また実験結果との比較的良い一致がみられる。なお、この計算では指定した出口マッハ数に計算結果を近づけるため、初期値の一部修正を行っている。この方法はあくまで便宜的な手段であり、流路内マッハ数分布は収束しない限り適

切には求まらない。

図9には入口マッハ数0.26のときの翼間流路内マッハ数分布を表す。翼後縁での若干の加減速が見られるが、おおむね妥当な分布が得られたと考えられる。

本論文での数値計算例は、計算コードのサイズを強調するため、格子生成を含めすべて16ビットパソコン(EPSON PC-286VE、クロック周波数12MHz、数値演算プロセッサ付)上で行った。また、一回の反復に要する時間は約10minで、収束する場合の反復回数は4~5回程度であった。

4. 結 言

本研究で得られた結果をまとめると以下のようになる。

- (1) Van den Braembusscheが提示した二次元翼列まわりの圧縮性流れ解析法に対し、接線流れ境界条件採用による積分方程式の第二種Fredholm型化、計算格子の改良、また翼面上渦分布による誘起速度の特異性除去など、計算精度向上のための改良を行った。
- (2) タービン翼列に本解析法を応用し、比較的高い出口マッハ数のところまで良好な結果が得られた。特に、有限体積法(Denton法)とは良い一致がみられ、解析法の有効性が実証された。
- (3) 遷音速流れの場合計算が収束しなかった。従って、本解析法の適正な計算対象は亜音速流であると判断

される。適用範囲拡大のための一つの便法として指定した出口マッハ数で計算を打ち切ったところ、比較的良好な結果が得られることがわかった。ただし、この方法の妥当性については検討の余地がある。

終わりに、本研究に終始懇切なご指導ご助言を戴いた東北大学名誉教授西山哲男先生(現石巻専修大学)に深い感謝の意を表す。また、本論文の図面作成には本学正路良孝技官の助力があったことを記し、ここに謝意を表す。

文 献

- (1) Van den Braembussche, R., Trans. ASME, J. Eng. Power, Vol.95, No.4, Oct. 1973, pp.345-351
- (2) Schmidt, R.C. and Patankar, S.V., NASA CR-4145, 1988
- (3) 西山, 船崎, 機論, 52-482, B (昭61), 3435
- (4) Martensen, E., Arch. Rat. Mech. Analysis, Vol.3, No.3, 1959, p.235
- (5) 西山, 矢野目, 機論, 45-394, B (昭54), 763
- (6) Lienhart, W., VDI - Forsch., 562, 1974
- (7) Bolcs, A., ASME Paper 83-GT-34, 1983
- (8) Bolcs, A. and Fransson, T.H., Communication de Laboratoire de Thermique Appliquee et de Turbomachines, No.13, 1986, Lausanne