

[論文]

二次元振動翼列の非定常空力特性解析

船崎 健一*
西山 哲男**

1. 緒言

航空エンジンをはじめ軸流ターボ機械の開発においては、圧縮機やタービンの翼振動対策は極めて重要な課題であり、ターボ機械の作動範囲内のフラッタ予測が強く望まれている。これに関連する研究は多くあり⁽¹⁾⁽²⁾、また著者らも二次元非圧縮流での振動翼列に作用する空力減衰力の特異点法による評価法を示した⁽³⁾。しかし、その計算精度については詳細には検討されていなかった。また、翼の定常負荷効果が非定常空力特性に与える影響についても、小林、高田⁽⁴⁾などの研究例はあるが、実験との比較も含め十分に調べられたとは言えない。

本論文では、先に著者らが提示した任意断面形状の振動翼列非定常空力特性解析法について、その解析精度をCartaの圧縮機翼列での実験結果⁽⁵⁾および他の解析法との比較により検証するとともに、同解法を用いて翼定常負荷による特性量の変化を計算する。

主な記号

- \vec{A} : 翼変位ベクトル
- C : 翼弦長
- C_{FM} : 非定常モーメント係数(式(15))
- C_{FX}, C_{FY} : 非定常流体力係数(式(14))
- F_M : 非定常モーメント
- F_x, F_y : 非定常流体力
- \vec{h} : 並進変位ベクトル
- i : 空間の虚数単位またはインシデンス
- j : 時間の虚数単位
- k : 無次元振動数 ($= \omega C / W_1$)
- m : 翼番号

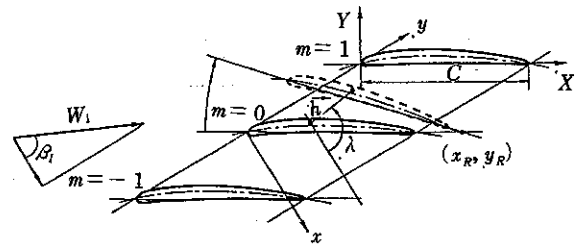


図1 翼列配備図および座標系

- p : 圧力
- \vec{q} : 速度ベクトル
- s, s_w : 曲線座標
- t_r : 動翼列ピッチ
- W : 相対流速
- z_R : 翼ねじり中心 ($= (x_R, y_R)$)
- $\bar{\alpha}$: ねじり振動振幅
- γ : 非定常翼面渦度分布
- γ_0 : 定常翼面渦度分布
- σ : 翼間振動位相差
- \vec{Q} : ねじり変位ベクトル
- 添字
- 0, 1 : 定常、非定常成分(または翼列入口)
- m : m 番翼に関する量
- s, \bar{s} : 翼面上瞬間位置、平均位置

2. 解析法

2-1 基礎式の誘導

解析法について簡単に記す⁽³⁾。図1のように二次元翼列が微小振動している場合を考える。このとき、速度場 \vec{q} は次のように展開される。

$$\vec{q} = \vec{q}_0(x, y) + \epsilon \vec{q}_1(x, y, t) + o(\epsilon^2) \quad \dots(1)$$

ここで、 ϵ は m 番翼表面の変位ベクトル $\vec{A}_m (= \vec{h}_m + \vec{Q}_m \times \vec{os}_m)$ の大きさを表す。翼面上接線流れの条件は、

*岩手大学工学部
**石巻専修大学
原稿受付日 平成2年10月19日

翼表面の瞬間位置を s とすると

$$(\vec{q} \cdot \vec{n})_s = \varepsilon \frac{\partial \vec{A}_m \cdot \vec{n}_s}{\partial t} \quad \dots(2)$$

となり、これを Taylor 展開することにより、結局以下のような翼の平均位置 s での非定常速度 \vec{q} に関する境界条件を得る。

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_s + \vec{q}_0 \cdot (\vec{Q}_m \times \vec{n}_s) + (\vec{A}_m \cdot \nabla) \vec{q}_0 = \frac{\partial \vec{A}_m \cdot \vec{n}_s}{\partial t} \quad \dots(3)$$

調和振動(無次元振動数 k)を想定し、基準翼($m=0$)に対する m 番翼の翼間位相差 $m\sigma$ を導入することにより、以後の議論が基準翼のみに限定される。

$$\vec{A}_m = \vec{A} e^{j(k t + m\sigma)} \quad \dots(4)$$

変位ベクトル $\vec{A} (= (A_x, A_y))$ は、ねじり中心を z_R ($= (x_R, y_R)$) として次のように複素表示される。

$$A_x + i A_y = \bar{h} e^{i\lambda} + i\alpha (z - z_R) \quad \dots(5)$$

$$\bar{h} = |\vec{h}|, \quad \alpha = |\vec{Q}|$$

λ : 並進変位ベクトルと x 軸のなす角

以上から次式を得る。

$$\begin{aligned} \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_s &= -\vec{q}_0 \cdot (\vec{Q} \times \vec{n}_s) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{q}_0 \cdot \vec{n}_s + jk \vec{A} \cdot \vec{n}_s \\ &= [-(\vec{q}_0 \times \vec{n}_s) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{q}_0 + jk \vec{A}] \cdot \vec{n}_s \end{aligned} \quad \dots(6)$$

式(6)が非定常速度 \vec{q}_1 に関する境界条件である。

2-2 積分方程式の誘導

\vec{q}_1 を翼面上および後流面上渦度分布 $\gamma(s)$ 、 $\gamma_w(s_w)$ で表すと、 $\gamma(s)$ に関する積分方程式が得られる。ここで、式(6)右辺第二項の $(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{q}_0$ に着目する。この項は、翼面の移動に伴う翼平均位置での定常速度の変化量に相当するが、翼前縁など速度勾配の大きなところではかなり大きな値になり(特異摂動展開に類似)、計算精度低下の一因となる。この点については、Whitehead⁽⁶⁾ や Atassi、Akai⁽⁷⁾ などが指摘しており、その対策法も示されている。本論文でも Atassi、Akai の方法と同様に、平均位置の翼面上で $-(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{q}_0$ の速度を与えるように複素吹き出しを翼面上に分布することによりこの項の影響を除去する。なお、この複素吹き出しは翼まわりの循環には影響せず、翼後縁での圧力差はないとする非定常クッタの条件から $\gamma_w(s_w)$ は次式で与えられる⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} \gamma_w(s_w) &= -\frac{jk}{W_0(s)} \left[\int \gamma(s) ds \right] \exp \\ &\quad \left[-jk \int_0^{s_w} \frac{ds_w'}{W_0(s_w')} \right] \end{aligned} \quad \dots(7)$$

以上から、次の第一種フレドホルム型積分方程式を得る。

$$\int_0^{2\pi} [K_1(\theta, \phi) + K_2(\theta)] \gamma \frac{ds}{d\phi} d\phi = G(\theta) \quad \dots(8)$$

$$G(\theta) = -\alpha \gamma_0 \frac{ds}{d\theta} + jk \left[A_x \frac{dy}{d\theta} - A_y \frac{dx}{d\theta} \right]$$

$$K_1(\theta, \phi) = g_x \frac{dy}{d\theta} - g_y \frac{dx}{d\theta}$$

$$K_2(\theta) = \int \frac{-jk}{W_0(s)} \exp \left[-jk \int_0^{s_w} \frac{ds_w'}{W_0(s_w')} \right]$$

$$K_1(\theta, \bar{s}_w) d\bar{s}_w$$

$$g_x = [f(X) + \overline{f(X)}] / 4 t_r, \quad g_y = j[f(X) - \overline{f(X)}] / 4 t_r$$

$$f(X) = \exp(j(\pi - \sigma) X) \operatorname{cosec} \pi X$$

$$X = X(x, y; x', y') = (y' - y + j(x - x')) / t_r$$

$$x = x(\theta), \quad y = y(\theta), \quad \theta: 0 \sim 2\pi$$

なお、 $\gamma_0(s)$ は定常解析から得られる翼面上定常渦度分布である。また、後流渦 γ_w は翼後縁からの定常よどみ点流線上に位置するものとする。

式(8)の積分方程式をそのまま離散化した場合に得られる係数行列は全体に密な行列であり、数値計算上の誤差の影響を受けやすくなる。そこで、式(8)をポアソンの積分公式を利用して第二種フレドホルム型に変換して係数行列の優対角化を行い、計算精度の低下を防ぐ⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\theta)}{2} + \int_0^{2\pi} L(\theta, \phi) \omega(\phi) d\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta') \\ &\quad \cot \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta' \end{aligned} \quad \dots(9)$$

$$\begin{aligned} L(\theta, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[K(\theta, \phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\pi} \cot \frac{\phi - \theta'}{2} \right] \cot \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \end{aligned} \quad \dots(10)$$

$$\omega(\theta) = \gamma(\theta) ds/d\theta,$$

$$K(\theta, \phi) = K_1(\theta, \phi) + K_2(\theta)$$

式(9)を数値的に解くことにより、非定常渦度分布 γ

が決定され、次節のように非定常空力特性が計算される。

2-3 非定常空力特性

圧力場も式(1)と同様に展開し、これをオイラーの式に代入して定常流線上で積分する。このとき、翼振動による定常圧力の平均位置での変化量を考慮すると、翼瞬間位置での非定常圧力 p_{1s} に関する次式を得る(複号は+が翼背側、-が翼腹側を表す)。

$$p_{1s} = p_{1s} + (\vec{A} \cdot \nabla) p_{0s}$$

$$= -\gamma_0(s) \gamma(s) \pm jk \int^s [\gamma(s) + \gamma_i(s)] ds \quad \dots(11)$$

$$\gamma_i(s) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{q}_0 \cdot \vec{i}$$

\vec{i} : 接線ベクトル

非定常流体力 (F_{x1}, F_{y1}) およびモーメント (F_{M1}) に関しても、翼振動による翼面法線ベクトルの傾きを考慮すると、定常流体力を (F_{x0}, F_{y0}) として

$$F_{x1} = -\int p_{1s} ds - \alpha F_{y0}$$

$$F_{y1} = \int p_{1s} dy + \alpha F_{x0} \quad \dots(12)$$

$$F_{M1} = \int p_{1s} ((x - x_R) dx + (y - y_R) dy) \quad \dots(13)$$

非定常流体力係数 C_{FX}, C_{FY} およびモーメント係数 C_{FM} を以下のように定義する。

$$C_{FX} = \frac{F_{x1}}{0.5 \rho W_1^2 C \delta}$$

$$C_{FY} = \frac{F_{y1}}{0.5 \rho W_1^2 C \delta} \quad \dots(14)$$

$$C_{FM} = \frac{F_{M1}}{0.5 \rho W_1^2 C^2 \delta^2}, \delta = \alpha \text{ or } \bar{h} \quad \dots(15)$$

3. 数値計算

3-1 数値計算法

計算の流れを図2に簡単に示す。はじめに、翼形状データを読み込み翼座標を角度空間(θ)で等間隔に生成したのち、西山・矢野目の方法⁽¹¹⁾を用いて定常流解析を行う。この結果を用いて翼後縁からのよどみ点流線を Runge-Kutta 法によって求め、後流渦 γ_w の位置を決定する。積分方程式(9)中の積分は、 θ 空間上での台形公式により評価されるが、核関数の変化が大きい区間では Gauss の積分公式を用いる。このようにして離散化して得られた連立方程式を解き、翼面上非定

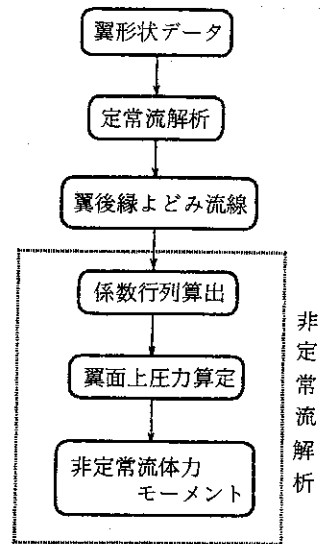


図2 数値解析の流れ図

常渦度分布を決定した後、式(11)で翼面上圧力分布が式(11)、(13)から非定常流体力およびモーメントが算出される。

今回の非定常流解析では翼面上計算点を60点に定めた。ただし定常流解析では120点で計算を行い、非定常流解析での定常流効果項の評価精度維持を図った。

3-2 計算対象

計算対象として Carta の振動翼列を用いた(翼形状 NACA65系、スタガ角 55° 、ソリディティ 1.33、無次元振動数 0.24)。振動モードは翼弦中心まわりのねじり振動である。

3-3 非定常圧力差分布

3-3-1 インシデンス = 2° の場合

図3(a)-(f)に、翼間振動位相差 σ を変えた場合の翼面上圧力差分布について、本論文で示した解法による予測値、Carta の実験値および Verdon、Caspar の差分解法による予測値を示す。本解法による結果と実験値とは、すべての翼間位相差に対してよく一致していることがわかる。一方、Verdon、Caspar の方法による予測結果は、圧力差分布の虚部に関しては本解法とほぼ一致しているが、実部については両者に明瞭な違いが確認され、この傾向は、翼間振動位相差が $40^\circ \sim 180^\circ$ のときが最も顕著になる。また、翼後縁付近での分布の不自然な変化も見られる。Verdon、Caspar の解法は、二次元振動翼列の非定常空力特性の予測法としては、Atassi、Akai の方法と並んで高い評価を得ているが⁽¹⁰⁾、今回の比較から、著者らの解法の方が

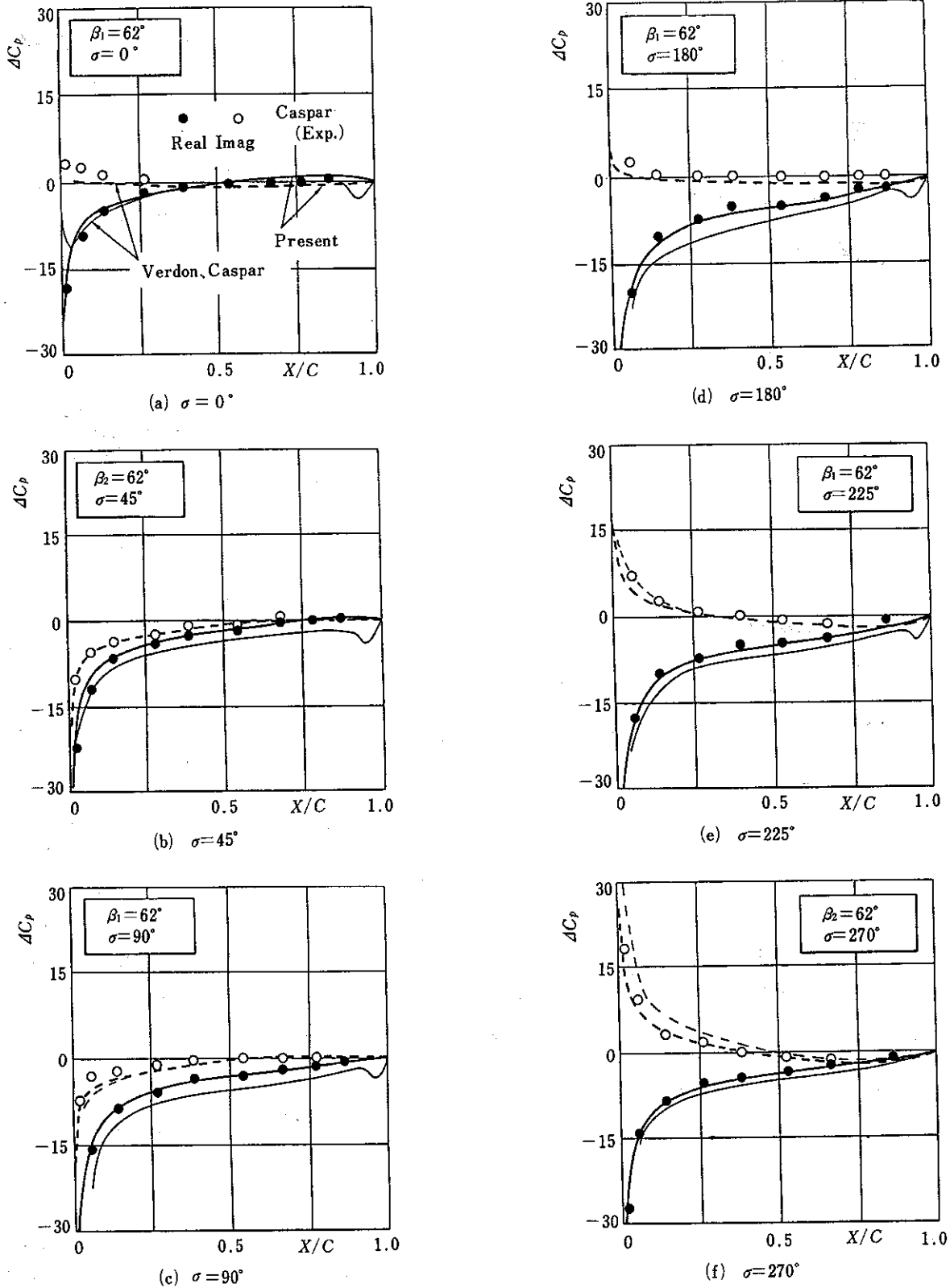


図3 非定常圧力差分布の比較 ($\beta_1 = 62^\circ / i = 2^\circ$)

これらの解析法よりも精度的により結果をあたえることがわかる。

3-3-2 インシデンス = 6° の場合

図4(a)(b)には、翼間振動位相差 225° および 315° の場合を示す。本解析結果と実験値とは全般的によく一

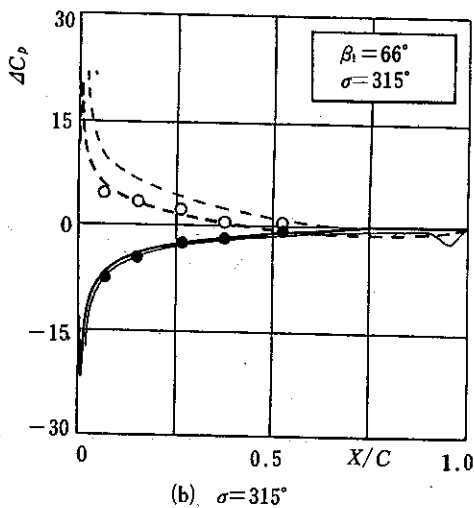
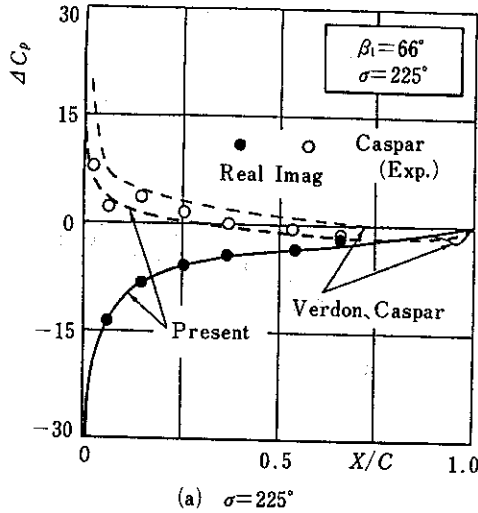


図4 非定常圧力差分布の比較 ($\beta_1=66^\circ/i=6^\circ$)

致しており、本解法の有効性を示している。一方、Verdon, Caspar 解法の結果は、3-3-1の場合と異なり虚部の食い違いが顕著である。

3-4 安定性判定

周知のように、振動翼列の安定性は、翼に作用する非定常流体力またはモーメントが振動の1サイクル間に翼に対して行う仕事 C_w の正負で判断する(正の場合、負減衰力として非定常流体力が作用する)。ねじり振動をしている翼列の場合この仕事は、

$$C_w = \int \text{Re}\{a(t)\} \text{Re}\{F_{M1}(t)\} dt = \pi \alpha^2 \text{Im}\{F_{M1}\} \quad \dots(14)$$

となり、非定常モーメントの虚部の正負で安定性境界の判定ができる。

図5にはインシデンス $i=2^\circ$ の場合の空力減衰パラメータ $\Xi (= -\text{Imag}(C_{FM}))$ について、位相差を変

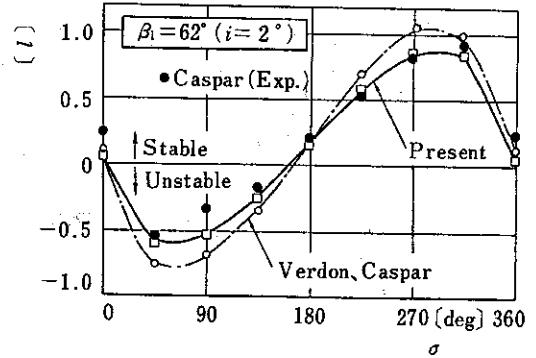


図5 翼間位相差による空力減衰パラメータの変化 ($\beta_1=62^\circ/i=2^\circ$)

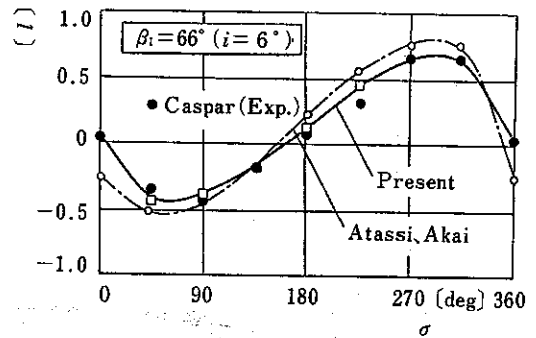


図6 翼間位相差による空力減衰パラメータの変化 ($\beta_1=66^\circ/i=6^\circ$)

えた場合の本解法による予測値、実験値および Verdon, Caspar 法による予測値を示す。二つの予測法の結果はほぼ実験値と一致しているが、本解法の方がより実験値に近い結果を与えることがわかる。

図6はインシデンス $i=6^\circ$ の場合である。ここでは、Atassi, Akai法との比較を行っている。Atassi, Akai 法は本解法と同様に特異点解法であり、予測結果もほぼ一致しているが、本解法の結果はより実験値に近いものとなっている。また、翼間振動位相差が 0° のとき、Atassi, Akai 法の結果は完全に不安定領域にあるが、実験値ならびに本解法の予測値はほぼ中立(若干安定側)にある点は着目される。非定常モーメントの絶対値および位相について比較した結果を図7に示す。

非定常モーメントは、翼間位相差がほぼ 180° のところで振幅が最大となり、また位相差は $0^\circ \sim 180^\circ$ の間で進み側(不安定)、 $180^\circ \sim 360^\circ$ の間で遅れ側(安定)となっている。この図においても本解法の予測値が実験値とほぼ一致しており、その有効性が確認される。

図8には翼負荷(インシデンス)の安定性境界への影響を調べた結果である。この結果を見る限り、翼負荷

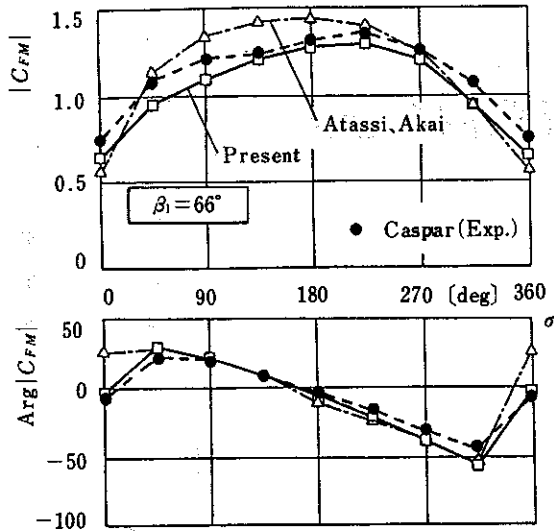


図7 翼間位相差による非定常モーメント係数の変化 ($\beta_1=66^\circ / i=6^\circ$)

の違いはモーメント係数の大きさに関係するが、安定性限界への影響は小さい。

4. 結論

本論文では、著者らが提示した振動翼列非定常空力特性解析法について、その解析結果をCartaの実験結果および既存の解析法と比較した。得られた結論をまとめると以下のようになる。

- (1) 著者らの解析法による翼面上圧力差についての予測値は実数値とよく一致した。
- (2) Verdon、Caspar (差分法) および Atassi、Akai (特異点法) の方法との比較から、本解析法

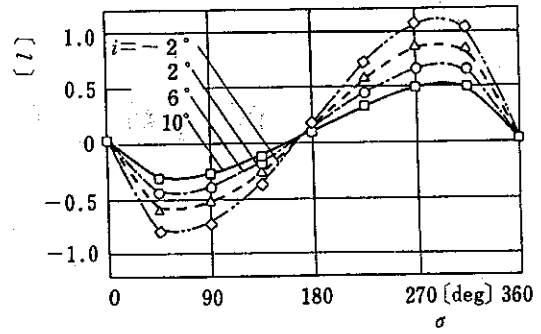


図8 翼負荷(インシデンス)による空力減衰パラメータの変化

がより実験値に近い結果を与えることが確認された。

- (3) 定常負荷による特性量の変化を算出した。今回の計算例では、定常負荷の安定性限界への影響は小さかった。

<参考文献>

- (1) Whitehead, D. S., ARC R & M, No.3254, 1960
- (2) Verdon, J. M. and Caspar, J. R., AIAA J. 18-5 (1980), 540
- (3) 西山、船崎、日本機械学会論文集、B編、51-472 (1985)、4124
- (4) 小林、高田、日本機械学会論文集、B編、55-509 (1989)、135
- (5) Carta, F. O., Trans. ASME, J. Eng. Power, 105(1983), 565
- (6) Whitehead, D. S., CUED/A-Turbo/TR 118(1982)
- (7) Atassi, H. and Akai, T. J., Trans. ASME, 102, (1980), 344
- (8) 船崎、東北大学博士論文 (1985)
- (9) 西山、村田、日本機械学会論文集、44-381 (1977)
- (10) Bolcs, A. and Fransson, T. H., Aeroelasticity in Turbomachines, EPFL, Switlerland, 1986
- (11) 西山、矢野目、日本機械学会論文集、B編、45-394 (1979)、763