

粘性後流中におけるクビン動翼列非定常応答予測法の改良*

(速度欠損減衰モデルの導入)

船崎 健一*1

Improvement on the Wake-Rotor Interaction Analysis Code
by use of a Wake Decay Model

Ken-ichi FUNAZAKI

The wake-rotor interaction analysis code, which was originally developed for the inviscid flow case by the author (1983), was improved by introducing a newly proposed wake decay model. This model utilizes the Reichardt's semi-empirical correlations for the wake decay behind the cylinder. From a comparison between experiments and the predictions obtained by original and modified versions of the code, it is found that the incorporation of that model could make the analysis code to provide better results.

Key Words : Wake-Rotor Interaction, Cascade, Wake Decay, Sinusoidal Gust, Vorticity Transport, Unsteady Fluid Force, Turbomachines

1. 緒言

ターボ機械の内部流は非定常であり、そのため動翼や静翼には常に非定常流体力が作用し翼振動の原因となっている。特に、前段翼列からの粘性後流に起因する翼の励振問題は、高サイクル疲労を誘発することなどターボ機械の信頼性にかかわる重要な問題であるため、以前から研究が盛んに行われている。著者は以前これに関連して、粘性後流中にある翼列翼に作用する非定常流体力、モーメントを算出する手法を、渦度輸送方程式に基づいて開発し、また実験によってこの手法の精度を検証したが、そこでは計算モデル中に粘性後流速度欠損の減衰効果を適切に考慮する必要性が明らかにされた。さらにこの実験では、装置上の制約のため比較的低い無次元周波数領域でしか実験が行えず、高無次元周波数領域での予測精度が不明であった。

最近石原らは、図1に示すように、回転円柱を用い

て実機状態に近い周波数の非定常流を作り、この円柱粘性後流中にあるクビン翼列上の非定常圧力分布を広範囲にわたり計測した。彼らの実験は系統的に行われており、そこで得られたデータは非定常流体力予測手法の改良に貴重なるものである。

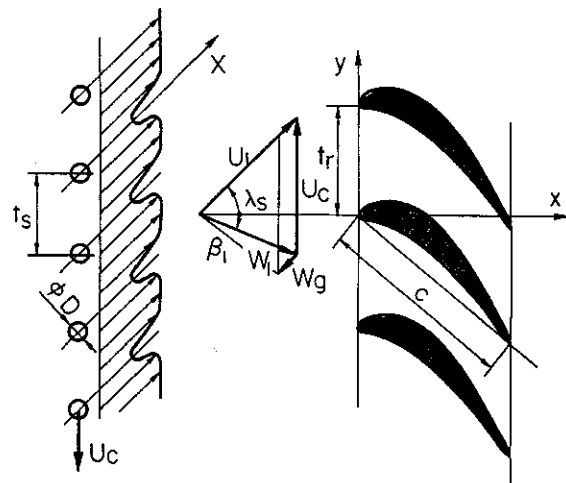


図1 翼列配置および速度三角形

* 原稿受付 平成2年2月5日。

*1 正員、岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5)。

以上のことから本論文では、はじめに先の実験で指摘された粘性後流減衰の効果を、Reichardtの円柱下流速度分布に関する実験式¹⁾を基にモデル化し、既存の計算コードの改良を行う。次に、この計算コードによる予測結果と石原らの実験データとの比較を行い、高無次元周波数までの計算精度を検証する。

記号

- a : 減衰係数
 C : 翼弦長
 Cd : 円柱の抗力係数
 C_L : 非定常揚力係数
 k : 無次元周波数 (= $\omega C / 2W_{0.95}$)
 (k_x, k_y) : 波数ベクトル
 tr, ts : 動翼列、静翼(円柱)列のピッチ
 (u^b, v^b) : 渦度による誘起速度
 U₁, W₁ : 動翼列絶対、相対流入速度
 Wg : 変動速度振幅
 X : 円柱下流方向への距離
 (x, y) : 動翼固定座標
 β₁ : 動翼列相対流入角
 λ_s : カスト角
 ω : 角周波数 (= $2\pi U_c / ts$)

2. 粘性後流の減衰特性

2.1 背景 先に著者が開発した手法は、線形化された二次元非粘性渦度輸送方程式により上流からの粘性後流をモデル化している。このため、粘性拡散や乱流拡散などによる粘性後流、換言すると速度欠損の減衰効果を考慮することができなかった。これを考慮するには粘性流中の渦度輸送方程式を解く必要があるが、本論文が目的している簡易手法には適当でない。そこで本論文では、Reichardtの円柱下流速度分布に関する実験式を基に、その速度分布のフーリエ解析結果から各ハモニック成分の振幅の減衰に対する近似関数をもとめる。そしてこの関数を先の計算コードに組み込み、粘性後流減衰のモデル化を試みる。

2.2 Reichardtの実験式 円柱下流の速度分布U(Y)に関するReichardtの実験式は次の様に与えられる。

$$\begin{aligned} U_{cl}/U_1 &= 0.939 \sqrt{Cd} (X/D) \\ b/D &= 0.250 \sqrt{Cd} (X/D) \\ U(Y)/U_{cl} &= \exp \{-0.639 (Y/b)\} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、Cdは円柱の抗力係数、U_{cl}は速度欠損の大きさ、U₁は一様流速度、2bは速度欠損の半値幅である。

No.1	翼弦長(C)	ピッチ(tr)	翼枚数
	80.0 [mm]	45.87 [mm]	48

(翼列)

	円柱径(D)	ピッチ(ts)	円柱数
No.1	4 [mm]	51.41 [mm]	44
No.2	4	102.82	22
No.3	8	205.63	11

(円柱)

表1 計算に使用した翼列および円柱列データ

式(1)を円柱列の周期性(ピッチ: ts)を考慮してフーリエ展開し、円柱からの距離 X/D に対する各ハモニック成分の振幅 A の減衰を求めた。その結果を図2 (Cd=1.0)、図3 (Cd=2.0)に示す。なお幾何学的データはすべて石原らの実験を引用した(詳細を表1に示す)。図2、3より、ハモニックごとに減衰の度合いが異なっていることがわかる。また、1次ハモニック成分の振幅の減衰が最も遅く、計算範囲内で直線的に減衰している。翼列の非定常応答においては1次ハモニックの効果と支配的と考えられるので、以下に1次ハモニックについてのみ考察を行うこととする。もちろん、高次ハモニックに対しても以下の議論はそのまま適用できる。

ここで円柱の抗力係数Cdについて考える。通常CdはReynolds数の関数として与えられるが、Reynolds数のかなり広い範囲(およそ $1 \times 10^4 \sim 2 \times 10^6$)でCd≒1となることが知られている²⁾。一方、石原らと同様の回転円柱列を用いたDoorly³⁾は、式(1)にCd=2を代入した結果と計測結果が比較的良く一致することを確認している。両者の差異の原因は明確ではないが、圧縮性効果の他に、回転場における遠心力効果が関与しているものと推定される。

2.3 速度振幅の1次ハモニック成分に関する減衰モデル

前述の図2、3の各1次ハモニック成分を取り出し、代表長さを動翼弦長に変えてそれらの減衰の状況を再表示したものを図4、5に示す。なお、縦軸は参照位置での振幅との比である。この結果、円柱列ピッチtsが小さくなるほど、換言すると円柱数が多いほど振幅の減衰が速いことがわかる。ここで、円柱列ピッチの減少により、円柱列の回転速度が一定の場合、無次元周波数が高くなる点に注意する。ここでの結果から、粘性後流の減衰をモデル化する際には、円柱列ピッチによる減衰速度の変化をその都度考慮する必要があることがわかる。図4、5の結果から振幅比の減衰を次の様にモデル化した。

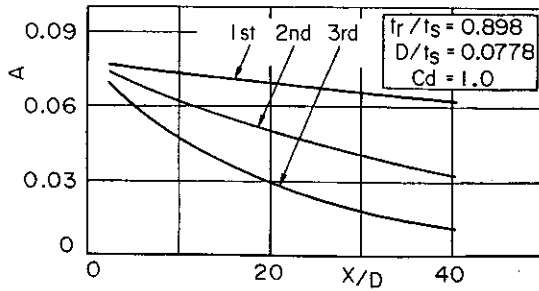


図2 各ハモニック成分速度振幅の減衰 (Cd = 1.0)

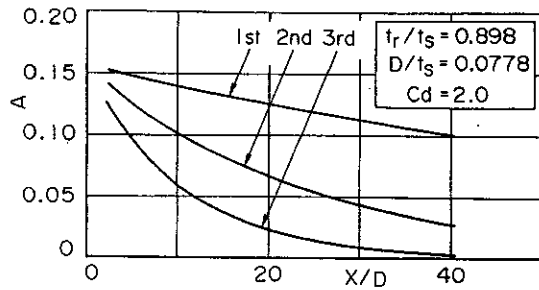


図3 各ハモニック成分速度振幅の減衰 (Cd = 2.0)

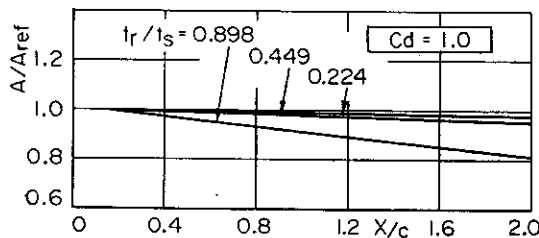


図4 1次ハモニック成分速度振幅の減衰 (Cd = 1.0)

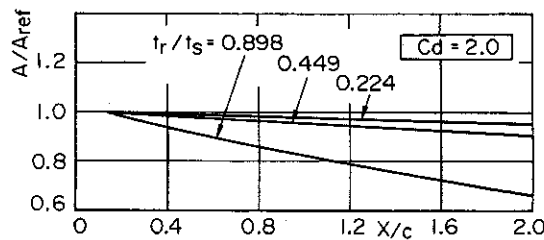


図5 1次ハモニック成分速度振幅の減衰 (Cd = 2.0)

$$A(X/C)/A_{ref} = \exp \{- a((X-X_{ref})/C)\} \quad (2)$$

ここで $a = a(tr/ts)$ で、表2で与えられる。また、 ref は速度の参照位置を表す。なお上式を展開すると、ガスト振幅減衰の効果を検討した石原らの表現とほぼ同様の表現になることがわかる。さて、次に

$$\Delta T \equiv (X - X_{ref}) / U_1 \quad (3)$$

tr/ts	$a(Cd=1.0)$	$a(Cd=2.0)$
0.898	0.10898	0.21815
0.449	0.02728	0.05474
0.224	0.01383	0.02721

表2 減衰係数

を定義する。 ΔT は距離 $(X - X_{ref})$ を速度 U_1 で移動するのにかかる時間を表す。式(3)より式(2)は次の様に書き直される。

$$A(\Delta T)/A_{ref} = \exp \{- a(U_1 \Delta T/C)\} \quad (4)$$

$$= \exp \{- a [d(X/C)/(U_1/U_1)]\} \quad (5)$$

式(4)または(5)から、一様流とともに移動する観測者からは粘性後流(の1次ハモニック成分の振幅)の減衰は時間の関数として表せることがわかる。これにより相対、絶対の座標系の違いによらず同一の減衰係数が使用できることになる。式(5)を定常流線上を移動する場合に一般化すると、結局次式を得る。

$$A(\Delta T)/A_{ref} = \exp(-a\Delta T) \quad (6)$$

$$\Delta T = \int d(S/C)/(W/W_1) \quad (7)$$

2.4 渦度の減衰係数 上流側翼列からの粘性後流速度分布を、図1のように動翼に固定された座標系において表示すると、

$$C(x,y;t) = W_g \exp \{j(kt - k_x x + k_y y)\} \quad (8)$$

ここで W_g は、式(6)、(7)および座標系の傾きの関係を考慮して次のよう表される。

$$W_g = W_g(X-X_{ref}) = W_g((x-x_0)/\cos(\lambda s)) \quad (9)$$

式(8)、(9)およびガスト角 λs (上流側翼列からの流出角) から粘性後流の x 、 y 成分を求め、結局翼列への流入渦度は次式で計算される。

$$\xi = \xi' \exp \{j(kt - k_x x + k_y y)\} \quad (10)$$

$$\xi' = -j W_g k_y / \cos(\lambda s) + \partial W_g / \partial x \quad (11)$$

$$\equiv \xi^* + \partial W_g / \partial x \quad (12)$$

式(12)の右辺において、一般に第二項は第一項と比べ十分小さく無視できることから、渦度の減衰係数は速度に関する式(6)と同形となる。即ち、渦度の振幅に関して、

$$|\xi/\xi_{ref}| = \exp(-a\Delta T) \quad (13)$$

非一様流中においても式(13)のモデルが適用できるものと仮定し、さらに減衰がない場合の渦度 ζ の一般表示式¹⁾および指数関数の性質を利用して次式を得る。

$$\zeta = \zeta^* \exp \{-jk\} dS/W(S) - a \Delta T \quad (14)$$

2.5 減衰モデルの検証 式(13)で与えた渦度の減衰モデルの妥当性を検証するため、式(13)によって一様流中での速度分布の減衰がどの程度再現されるかを計算する。式(10)の時間項を除き、減衰モデルを考慮した渦度分布は次式で与えられる。

$$\zeta = \zeta^* \exp \{-a'(x-x_0) - jk_x x + k_y y\} \quad (15)$$

$$a' = a / \cos(\lambda_s)$$

ここで、 x_0 は渦度の減衰開始位置である。渦度による誘導速度(u^h, v^h)は

$$u^h = - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\zeta \cdot (y-y') \, dx'dy'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (16)$$

$$v^h = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\zeta \cdot (x-x') \, dx'dy'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (17)$$

で計算される。上の被積分関数を部分分数分解し、さらに付録に示す積分公式を用いて結局次式を得る(ただし、 $x > x_0$)。

$$u^h = j\zeta^* \exp(jk_y y) (z_1 + z_2 + z_3) / 2$$

$$v^h = \zeta^* \exp(jk_y y) (z_1 + z_2 - z_3) / 2 \quad (18)$$

$$z_1 = \exp \{-k_y(x-x_0) + (a' - jk_x)x_0\} / (k_y - jk_x)$$

$$z_2 = \exp(jk_x x_0) [\exp \{-(a' + jk_x)(x-x_0)\} - \exp \{-k_y(x-x_0)\}] / (k_y - a' - jk_x) \quad (19)$$

$$z_3 = \exp \{-a'(x-x_0) + jk_x x\} / (k_y + a' + jk_x)$$

式(18)に対し、表1の幾何学的条件および先に求めた減衰率 a' ($Cd=2.0$)を代入し渦あり速度(u^h, v^h)を計算する。その速度の大きさの流れ方向への変化を図6に示す。またこの図には式(6)より算出した速度の減衰をあわせて示してある。この結果、式(12)の $\partial Wg/\partial X$ を無視した式(13)の渦度減衰モデルが、速度欠損の減衰を十分な精度でシミュレートできることがわかった。

3. 計算結果

3.1 定常圧力分布 図7、8に翼まわりの定常圧力分布の計算結果を、実験値とともに示す。なお、翼形状および翼列配置は図1に示されている。また、以下の計算には文献(3) No.1翼を使用した。定常圧

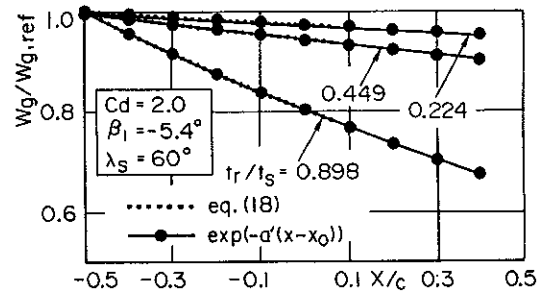


図6 渦度減衰モデルの検証 ($Cd = 2.0$)

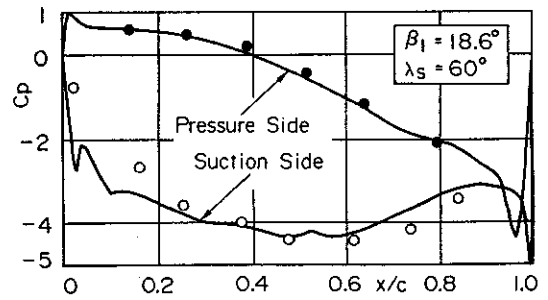


図7 定常速度分布 ($\beta_1 = 18.6^\circ$)

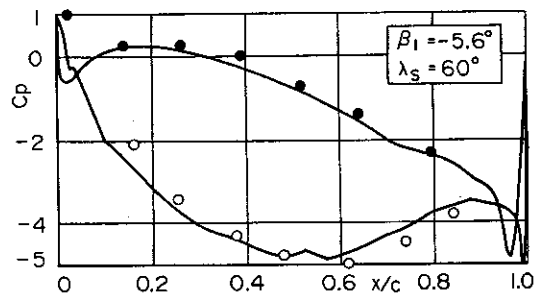


図8 定常速度分布 ($\beta_1 = -5.6^\circ$)

力分布に関しては、実験値と計算値は全般的によく一致をしている。流入角 $\beta_1 = 18.6^\circ$ (文献(3)では $\beta_1 = 120^\circ$)の場合に翼背面側の前縁近傍で若干の差が見られるが、これはインテンシティが大きくなり翼面上に剥離泡が生じたためと推定される。

3.2 非定常揚力

3.2.1 計算格子 図9に渦あり速度(u^h, v^h)を求めるための計算格子を示す。この格子は y 軸に平行で等間隔の縦線と定常流線とで構成されているおり、格子点数は 55×21 である。

3.2.2 非定常揚力 非定常揚力係数 $C_{l,u}$ は次式で与えられる。

$$C_{Lmax} = L_{max} / 0.5 \rho W_{\infty} |Wg| C \quad (20)$$

$$L_{max} = L_x \cos(\beta_{max}) + L_y \sin(\beta_{max}) \quad (21)$$

ここで、 L_x 、 L_y は x 、 y 方向の流体力、 β_{max} は実験的に求めた L_{max} の作用方向である。

非定常揚力に関する実験値と計算結果との比較を行う前に、石原らの実験について簡単に述べる。石原らは実験においてガスト角が一定になるように円柱列回転速度 (Uc) を変化させ、結果として無次元周波数を変化させている。このとき供試翼列への流れは円柱列に作用する抗力の反力により転向させられ、この流れの転向量は円柱列の回転速度とともに変化する。一方今回の計算では、計算格子の再計算という煩雑さを避けるため、流入角 β 一定の場合のみを考えている。このとき流量係数 U/Uc も一定 ($= 0.547$) となるため、無次元周波数のみを独立に変化させることはできない点に注意する。

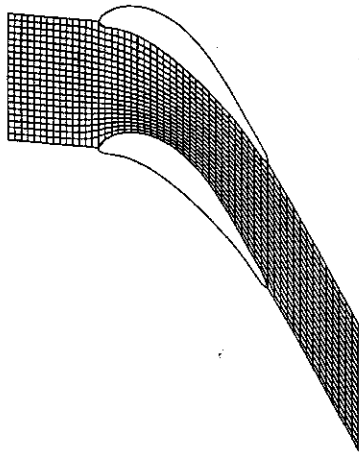


図9 渦度分布用計算格子 ($\beta_1 = -5.6^\circ$)



図10 翼間流路内渦度分布 ($tr/ts = 0.898$)

図10には、円柱後流位置を表す翼間流路内の等渦度線を示し、また図11には、この等渦度線と渦度により誘起される非定常速度ベクトル (u^k, v^k) との関係を示す (減衰効果なし)。なお、ガスト角 λ は 60° である。図10、11から、翼前縁で切断された円柱後流が翼間流路内で変形し、その際誘起された非定常速度場が、後流の両側に回転方向が異なる渦構造を形成することがわかる。

非定常揚力係数の実験値と計算結果 (減衰効果を考慮した場合 $Cd = 2.0$ を含む) を図12に示す。減衰効果を考慮しない計算結果は、無次元周波数 k に対する揚力の変化に関して実験値と定性的にほぼ一致しており、比較的低い k のところでは振幅値も実験に近い。一方、高無次元周波数領域では計算値が実験値の1.5~2倍程度になっており、解析法の予測精度が低下している。ただしこの差が有意差であるかどうか



図11 減衰効果のない非定常速度場 ($tr/ts = 0.898$)

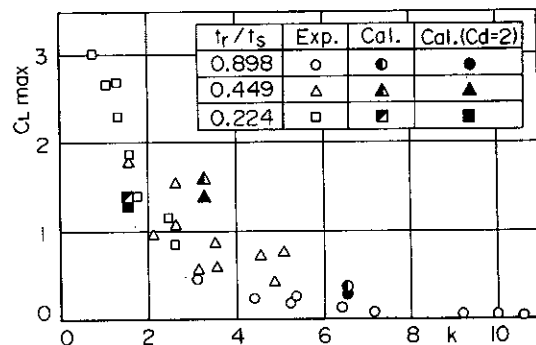


図12 非定常揚力 (計算値と実験値との比較)

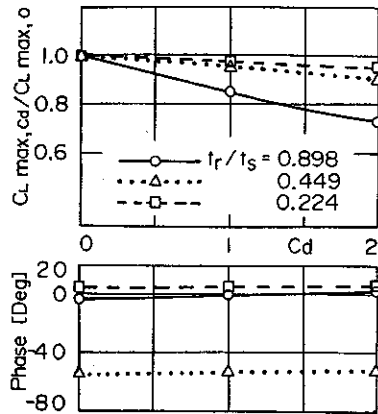


図13 渦度減衰効果による非定常揚力の変化

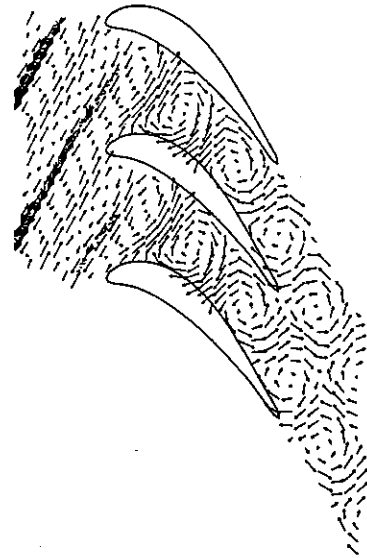
かの厳密な議論は、実験および計算で求めた揚力係数の不確かさの範囲に基づいて行う必要がある。

減衰モデルを用いた場合 ($C_d = 1.0, 2.0$) の非定常揚力係数の計算値を図13に示す。この図より、粘性後流の減衰効果により非定常揚力の振幅が減少し、その位相が若干進むことがわかる。このとき、ピッチ比 t_r/t_s が大きい (無次元振動数が高い) ほど、また抗力係数が大きいほど振幅値の減少の度合いが大きい。ここで、非定常揚力の無次元化 (式(20)) に用いるガスト振幅 W_g が渦度の減衰により下流方向に変化していることに注意する。従って、実験値との比較を適正に行うためには、円柱列位置 ($x/C = -0.5$) とガスト計測位置 ($x/C = -0.269$) と指定し、式(6)によりこのガスト振幅値の変化分を補正しなければならない。この補正を施した結果を図12に併記する。ここではDoorlyらの指摘⁽⁶⁾を参考にした $C_d = 2$ の場合の結果を示す。揚力係数の減少がガスト振幅の減少分で若干打ち消された格好にはなっているが、粘性後流の減衰モデルの導入により、主に高無次元数領域での計算値が改良され、実験に近い値となっていることがわかる。

図14には減衰効果を考慮した場合の渦度による非定常誘起速度ベクトルを示す。なお、図中の渦度および速度ベクトルの指示方法は図11と同じである。この結果では、渦度の減衰効果を導入しても、速度ベクトルの大きさが下流方向に減衰しているほかは、流路内の非定常速度場全般には大きな変化は見られない。

4. 検討

以上の結果から、本論文で提示した渦度の減衰モデルを既存の計算コードに組み込むことにより、特に高無

図14 減衰効果のある非定常速度場 ($t_r/t_s = 0.898$)

次元周波数領域での非定常揚力に関する予測精度の改善が得ることがわかった。しかしながら、ここでの減衰モデルは二次元流中の円柱後流速度分布に基づいて誘導された結果であり、三次元回転場中でのモデルの有効性については今後検討および改善の余地がある⁽⁶⁾。また、改良された計算コードを実際のタービン機械での問題に応用する場合には、翼列の粘性後流に関する適当な実験式を用いる必要がある。例えば、Reynoldsらの研究では、圧縮機動翼後流の最大速度欠損 U_{11} の実験式として次式が示されている⁽⁶⁾。

$$U_{CL}/U_{11} = C_d^{-0.5} \{ B_5 [(X/D) - (X_0/D)] + B_6 [(X/D) - (X_0/D)] \} \quad (22)$$

ここで、式(1)と式(22)で抗力係数の指数が異なっている点に注意する。

この Reynolds らの実験式も汎用性については十分検討されているとは言えない。今後計算コードの精度向上と汎用化のため、実験データの蓄積を進めることにより、実用的な後流速度分布の実験式を決定する必要がある。

5. 結言

本研究で得られた成果をまとめると以下のようなになる。

- (1) Reichardt の円柱後流速度分布に関する実験式を基に、動翼列に対する粘性後流速度の減衰モデルを求め、これより渦度の減衰モデルを提示した。

- (2) 提示した渦度減衰モデルの使用により一様流中の周
期変動速度の減衰が十分な精度で再現できることを
示した。
- (3) 先に開発した粘性後流中にある動翼列の非定常応
答計算コードは、定性的に良好な予測値を与えるが、
高無次元周波数領域でその精度が低下する。
- (4) 渦度減衰モデルを同計算コードに組み込んだ結果、実
験値により近い予測値を得ることができたが、今後
さらに精度向上のための改良が必要である。

終わりに臨み、貴重なアドバイスを提供していただいた
川崎重工業（株）石原国彦氏に謝意を表す。また、本
論文中の図面作成には本学正路良孝技官の助力があっ
たことを記し、ここに謝意を表す。

文 献

- (1) 西山、船崎、機論、50-454、B編（昭59）、1476
- (2) 西山、船崎、機論、52-475、B編（昭61）、1005
- (3) 石原ら、機論投稿中（平1）
- (4) Reichardt, H., VDI-Forsch. 414 (1942)
- (5) Schlichting, H., Boundary-Layer Theory, (1968), 17, McGraw-Hill
- (6) 石原、船川、機論、44-384、（昭53）、2717
- (7) 笠木、長野、ターボ機械、17-4、（平1）、256
- (8) Reynolds, B. et al., AIAA J. 17-9, (1979), 959

付 録

$$I_1 = \int \frac{\exp(j K_v y')}{(y' - y) - j(x - x')} dy'$$

$$I_2 = \int \frac{\exp(j K_v y')}{(y' - y) + j(x - x')} dy'$$

Fourier積分に関する公式より(付1)、

$$\int \frac{\exp(-2\pi j xy)}{\{x - (C_1 + jC_2)\}^m} dx = 2\pi j H(-C_2 y) \operatorname{sgn}(C_2) \times (-2\pi j y)^{m-1} \exp\{-2\pi j(C_1 + jC_2)y\} / (m-1)!$$

ここで、H(x)はHeavisideのステップ関数である。

I₁では、

$$x \rightarrow y' - y, C_1 = 0, C_2 = x - x', m = 1, -2\pi y = K_v$$

I₂では、

$$x \rightarrow y' - y, C_1 = 0, C_2 = -x + x', m = 1, -2\pi y = K_v$$

を代入することによりそれぞれ次式で与えられる。

$$I_1 = 2\pi j H(x-x') \operatorname{sgn}(x-x') \exp\{K_v(jy - (x-x'))\}$$

$$I_2 = 2\pi j H(x'-x) \operatorname{sgn}(x'-x) \exp\{K_v(jy + (x-x'))\}$$

結局、式(16)、(17)の被積分関数はそれぞれ I₁、I₂を用いて次のように表される。

$$I = -(I_1 + I_2) / 2 = -\pi j \exp\{K_v(jk - |x-x'|)\}$$

$$J = (I_1 - I_2) / (2j) = \operatorname{sgn}(x-x') \pi j \exp\{K_v(jk - |x-x'|)\}$$

(付1) Lighthill, M.J., An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions, (1958), Cambridge Univ. Press