

前縁半径の大きな場合の非定常翼列応答解析法の開発*
(第1報, 理論展開)

船崎 健一*1, 角館 聡*2

A New Technique for Analysis of Unsteady Aerodynamic Responses
of Cascade Airfoils with Blunt Leading Edge
(1st Report, Theory)

Ken-ichi FUNAZAKI and Satoshi KAKUDATE

A new technique has been developed, based on the technique proposed by Goldstein(1978), in order to analyze unsteady aerodynamic responses of cascade airfoils subjected to incident wakes. One of the important features of this technique is the introduction of the additional perturbation potential for the purpose of preventing the solution being indeterminate due to the singular behavior of the unsteady perturbed velocities around the blunt leading edge. In this paper, the main focus is placed on the theoretical development of the technique, and some simple cases of numerical calculations with no stagger angle are made in order to show the validity of our method.

Key Words: Unsteady Flow, Cascade, Wake, Blunt Leading Edge, SOR Method

1. 緒 言

従来よりタービン機械内での翼列干渉に起因する非定常流の研究が数多くなされているが、非定常流解析を積極的に翼設計等に取り入れた実例は、解析ソフトの信頼性、使い勝手などの不備もあり、ほとんど知見できず、今後さらに解析手法の開発が必要である。

既存の手法として、非定常成分を微小とした線形理論については、著者の一人の一連の研究を含めていくつか報告されている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。これらの多くは、後流速度分布の渦度に着目し、渦度輸送方程式により後流の翼間流路内の移動を考慮している。そのため、密度変化が渦度変化に関与する圧縮流の解析が困難になっている。また、翼前縁部での取扱いの際に、暗黙のうちに cusp を想定しているため、タービンのように翼前縁半径が大きな場合、cusp の設定に一貫性を欠き、また重要な効果を見逃している危険性がある。

そこで本研究では、Goldstein⁽⁴⁾によって提唱された、鈍頭物体まわりの非定常流解析法を基に、上流側からの後流に対する前縁半径の大きな場合の翼列非定常応答解析法の開発を行った。特に、Goldstein法で問題となる、非定常渦あり変動速度が翼よどみ点以降で発散し、その結果境界条件が不定になる点について、その特異性を打ち消す修正ポテンシャルを導入し、問題の解決を図った。

主な記号

- A : 上流側じょう乱速度
- C : 翼弦長
- c_0 : 定常流の音速
- g : ドリフト関数
- i : 虚数単位

\vec{i}, \vec{j} : x, y 方向の単位ベクトル

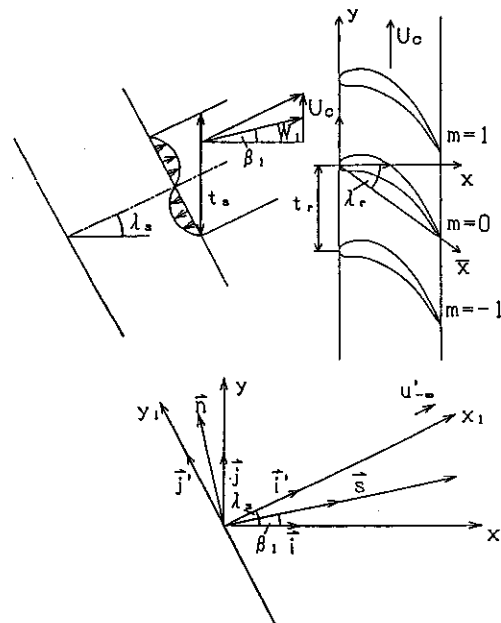


図1 周期変動流中の翼列 (翼列配置と座標系)

* 原稿受付 平成3年7月17日。
*1 正員, 岩手大学工学部(〒020 盛岡市上田4-3-5)。
*2 正員, 日本原子力研究所(〒311 茨城県那珂郡那珂町)。

- \vec{k} : 波数ベクトル ($= (k_x, k_y)$ or $= (k_s, k_n)$)
- k : 無次元振動数
- M_0 : マッハ数
- \vec{n} : ϕ_0 方向の単位ベクトル
- p : 非定常じょう乱圧力
- \vec{s} : ϕ_0 方向の単位ベクトル
- s : エントロピ
- t_r/t_s : 動、静翼列のピッチ比
- U_0 : 一様流の速度
- u : 非定常じょう乱速度
- u^R : 非定常じょう乱渦あり速度
- β_1 : 流入角
- λ_s : 静翼列絶対流出角
- ρ_0 : 一様流の密度
- ρ : 非定常じょう乱密度
- σ : 翼間位相差
- ϕ : 非定常じょう乱ポテンシャル
- ϕ_0 : 定常速度ポテンシャル
- $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}$: 修正じょう乱ポテンシャル
- ϕ_0 : 流線関数
- 添字
 - s : ϕ_0 方向の成分
 - n : ϕ_0 方向の成分
 - o : 定常流成分
 - $-\infty$: 上流側
 - ∞ : 下流側

を仮定する。式(5)~(8)より式(1)~(3)を線形化すると、定常、非定常の連続の式、運動量の式、エネルギー式は次式となる。

$$\nabla(\rho_0 \cdot U_0) = 0 \quad (9) \quad \rho_0(U_0 \cdot \nabla)U_0 = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U_0 + \rho_0 u) = 0 \quad (11)$$

$$\rho_0 \left[\frac{D_0 u}{Dt} + (u \cdot \nabla)U_0 + \rho(U_0 \cdot \nabla)U_0 \right] = -\nabla p \quad (12)$$

$$\frac{D_0 s}{Dt} = 0, \quad \frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla \quad (13)$$

非定常じょう乱速度 u を Goldstein⁽⁴⁾ の提案に従い渦ありと渦なしの和として次のように表す。

$$u = u^R + \nabla \phi \quad (14) \quad u^R = \frac{S}{2c_p} U_0 + u^{(R)} \quad (15)$$

$$s = b(\vec{x} - \vec{i} U_0 t) \quad (16)$$

b は $(\vec{x} - \vec{i} U_0 t)$ を引数とする任意関数で、上流でのエントロピと渦あり速度に対する条件を満足するように決定される。圧力変動は、渦あり速度 u^R と独立に与えることができる。即ち、

$$p = -\rho_0 \frac{D_0 \phi}{Dt} \quad (17)$$

これより、 $u^{(R)}$ が次の同次方程式から決定される。

$$\frac{D_0 u^{(R)}}{Dt} + (u^{(R)} \cdot \nabla)U_0 = 0 \quad (18)$$

以上から、非定常ポテンシャル ϕ を支配する波動方程式は、式(14)、(17)より次のように示される。

$$\frac{D_0}{Dt} \left[\frac{1}{c_p^2} \frac{D_0 \phi}{Dt} \right] - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \phi) = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 u^R) \quad (19)$$

式(15)、(18)より非定常じょう乱渦あり速度 u^R を求め、式(19)から非定常じょう乱ポテンシャル ϕ を求めることにより、流れ場の非定常じょう乱速度 u を決定できる。

2.2 非定常渦あり速度 Kershen, Balsa⁽⁵⁾ は、座標系を (x, y) 系から定常流の等ポテンシャル線-流線からなる (ϕ_0, ψ_0) 系へ写像することにより、式(18)の解が容易に得られることを示した。

$$u^{(R)} = u_s^{(R)} \vec{s} + u_n^{(R)} \vec{n} \quad (20) \quad U_0 = U_0 \vec{s} \quad (21)$$

とおくことにより、 $u^{(R)}$ を ϕ_0, ψ_0 座標系で表示すると、

$$u_s^{(R)} = C_1 \frac{U_0}{U_0} \exp(i \alpha') \quad (22)$$

$$u_n^{(R)} = \frac{\rho_0 U_0}{\rho_s} \left[\int_{-\infty}^{\phi_0} C_1 U_0 \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\frac{1}{U_0^2} \right) d\psi_0 + C'(\psi) \right] \exp(i \alpha') \quad (23)$$

2. 基礎式

2.1 支配方程式

流れ場を非粘性流と仮定すると、連続の式、運動量の式、エネルギー式は次式で表される。

$$\frac{D \rho'}{Dt} + \rho' \nabla \cdot U = 0 \quad (1) \quad \frac{DU}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho'} \quad (2)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (3) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla \quad (4)$$

ここで、非定常じょう乱が定常流成分と比して微小であると仮定して、速度、圧力等を以下のように与える。

$$U = U_0(x) + \varepsilon u(x, t) \quad (5) \quad p = P_0(x) + \varepsilon p(x, t) \quad (6)$$

$$\rho' = \rho_0(x) + \varepsilon \rho(x, t) \quad (7) \quad s = s(x, t) \quad (8)$$

$$x = (x_1, x_2) \quad x_1 = x \quad x_2 = y$$

式(8)では定常流のエントロピは一様で、その値を0としている。さらに、 U_0 に対して

$$U_0 = (U_0, V_0, 0) \quad U_0 = \nabla \phi_0 \quad \nabla \times U_0 = 0$$

$$\alpha' = -k_s \phi_0 - k_n g(\phi_0, \psi_0) + k_n \psi_0 + k t \quad (24)$$

$\vec{k} = (k_s, k_n)$ は波数ベクトルであり、 k は無次元振動数である。上流で流れが一様になることを考慮して、式(23), (24)が上流側で、次のように指定された周期変動流と接続するように未定係数 $C_1, C'(\phi)$ を決定する。

$$\frac{u_{-\infty}}{U_0} = A \exp(i \alpha'), \quad A = (A_s, A_n) \quad (25)$$

$$s = s_{-\infty} \exp(i \alpha') \quad (26)$$

この結果、非定常じょう乱速度 u は、 ρ_s を $\rho_s = \rho_0$ とし、長さを翼コード長さ C 、速度を上流の流速 U_0 で無次元化すれば、次式で与えられる。

$$u_s^* = \left[\frac{A_s^*}{U_0} + s_{-\infty} U_0 \right] \exp(i \alpha') \quad (27)$$

$$u_n^* = \rho_0 U_0 \left[A_n + A_s^* \frac{\partial g}{\partial \phi_0} \right] \exp(i \alpha') \quad (28)$$

$$A_s^* = A_s - s_{-\infty} \quad (29)$$

$g(\phi_0, \psi_0)$ は *lighthill* のドリフト関数⁽¹⁾である。

2.3 上流側周期変動流 図1に表わされる上流側粘性後流を非粘性うずあり流れと考え、上流側速度分布を次のように表す。

$$u_{-\infty} = \vec{i}' \exp\left(i \frac{2\pi Y_1}{t_s \cos \lambda_s}\right) \quad (30)$$

Y_1 を動翼に固定された座標系 (x, y) で表し式(30)に代入し、流入周期変動流 $u_{-\infty}$ の x, y 成分を $u_{-\infty} = (u_{-\infty}, v_{-\infty})$ とすると、各成分に対し次式を得る。

$$\begin{pmatrix} u_{-\infty} \\ v_{-\infty} \end{pmatrix} = a_m \begin{pmatrix} \cos \lambda_s \\ \sin \lambda_s \end{pmatrix} \exp i(k t + k x) \quad (31)$$

ただし、波数ベクトル $\vec{k} = (k_x, k_y)$ の各成分は、

$$k_y = \frac{2\pi C}{t_s}, \quad k_x = -k_y \tan \lambda_s \quad (32)$$

で与えられる。この結果から (ϕ_0, ψ_0) 系での表示として、

$$\begin{aligned} k_s &= k \cdot \vec{s} = (k_x \vec{i} + k_y \vec{j}) (\cos \beta_1 \vec{i} + \sin \beta_1 \vec{j}) \\ &= \frac{\sin(\lambda_s - \beta_1)}{\cos \lambda_s} k_y = \frac{\sin \lambda_m}{\cos \lambda_s} k_y \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} k_n &= k \cdot \vec{n} = (k_x \vec{i} + k_y \vec{j}) (-\sin \beta_1 \vec{i} + \cos \beta_1 \vec{j}) \\ &= \frac{\cos(\lambda_s - \beta_1)}{\cos \lambda_s} k_y = \frac{\cos \lambda_m}{\cos \lambda_s} k_y \end{aligned} \quad (34)$$

無次元振動数 k は次のように定義される。

$$k = \frac{\omega c}{W_1} = 2\pi \frac{c}{t_s} \frac{U_0}{W_1} \quad (35)$$

3. 補正ポテンシャルの導入

3.1 翼面上での境界条件 ドリフト関数は

$$g(\phi_0, \psi_0) = \int_{-\infty}^{\phi_0} \left(\frac{1}{U^2(\phi_0, \psi_0)} - 1 \right) d\phi_0 \quad (36)$$

と与えられ、図2のような鈍頭物体回りの流れではよどみ点の存在により、よどみ点下流では $\phi \rightarrow \phi_s$ (ϕ_s : よどみ流線) で $g \rightarrow \infty$ となる特異性を示し、この影響が物体面に沿って下流まで残るという問題を引き起こす。従って式(28)から、翼面上での非定常じょう乱渦あり速度の u_n^* が発散し、翼面上境界条件が不定になる。*Cargill*⁽²⁾ *Atassi, Gredzinski*⁽³⁾ は、このドリフト関数の特異性が対数的特異性となることを示した。即ち、

$$\lim_{\phi_0 \rightarrow \phi_s} g(\phi_0, \psi_0) \rightarrow \alpha_0 \ln |\psi_0 - \psi_s|, \quad \alpha_0 = - \left(\frac{\partial U_0}{\partial n_0} \right)_{\text{stag}}^{-1} \quad (37)$$

これを考慮して、ドリフト関数を次式のように考える。

$$\begin{aligned} g &= [g(\phi_0, \psi_0) - \alpha_0 \ln |\psi_0 - \psi_s|] + \alpha_0 \ln |\psi_0 - \psi_s| \\ &\equiv \bar{g}(\phi_0, \psi_0) + \alpha_0 \ln |\psi_0 - \psi_s| \end{aligned} \quad (38)$$

$\bar{g}(\phi_0, \psi_0)$ は、ドリフト関数のうちの正則部を表す。物体面 S 上での境界条件は、法線ベクトルを \vec{n}_0 として、

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (39)$$

前述の関係式より、例えば物体面上 ϕ_s^* では

$$\nabla \phi \cdot \vec{n}_0 = -\vec{u}^* \cdot \vec{n}_0 = -u_n^* \quad (40)$$

となる。式(28)から明らかなように u_n には $\partial g / \partial \psi_0$ の項が含まれており、境界上 ($\psi_0 \rightarrow \psi_s^*$) では、その特異性のため物体面での境界条件が特異になってしまう。この問題を解消するために、補正ポテンシャルの導入を行う。まず式(40)左辺を変形し、

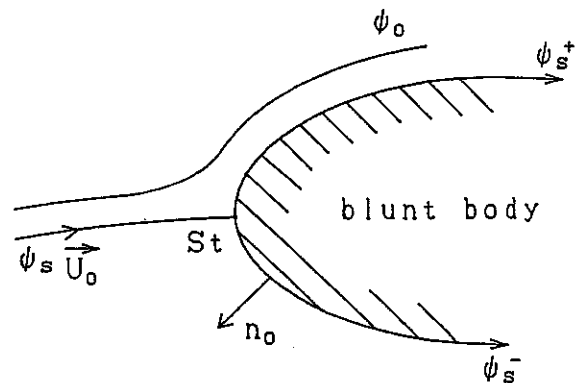


図2 鈍頭物体前縁近傍の流れ

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_0} = \frac{\partial \phi}{\partial \psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial n_0}$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial n_0} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n_0} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n_0} = \rho_0 U_0$$

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial n_0} = \frac{\partial \phi}{\partial \psi_0} \rho_0 U_0 \quad (41)$$

を得る。境界上 $\psi_0 \rightarrow \psi_s$ での u_n の特異性より、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \psi_0} = \overline{A_n} \exp[i\{-k_s \psi_0 - k_s(\overline{g} + \alpha_0 \ln|\psi_0 - \psi_s| + k_n \psi_0)\}] \times \exp(jkl) \quad (42)$$

$$\overline{A_n} = A_n + A_s \frac{\partial g}{\partial \psi_0} \quad (43)$$

となる。ここで、 $\psi_0 \rightarrow \psi_s$ で $F(\psi_0) \rightarrow \psi_0 - \psi_s$ という挙動を示す任意関数 $F(\psi_0)$ を導入して

$$\phi = \hat{\phi} + \tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi} = \beta(\psi_0) F(\psi_0) \exp(i\alpha') \quad (44)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_0} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \psi_0} + \frac{\partial \beta(\psi_0)}{\partial \psi_0} F(\psi_0) \exp(i\alpha') \\ &+ \beta(\psi_0) \left[\frac{\partial F(\psi_0)}{\partial \psi_0} \exp(i\alpha') + F(\psi_0) \frac{\partial}{\partial \psi_0} (\exp(i\alpha')) \right] \\ &= -\left(A_n + A_s \frac{\partial g}{\partial \psi_0} \right) \exp(i\alpha') \end{aligned} \quad (45)$$

$\psi_0 \rightarrow \psi_s$ の極限では、 $F(\psi_0)$ 、 $\partial F(\psi_0)/\partial \psi_0$ は

$$\lim_{\psi_0 \rightarrow \psi_s} F(\psi_0) \rightarrow \psi_0 - \psi_s, \quad \lim_{\psi_0 \rightarrow \psi_s} \left(\frac{\partial F(\psi_0)}{\partial \psi_0} \right) \rightarrow 1$$

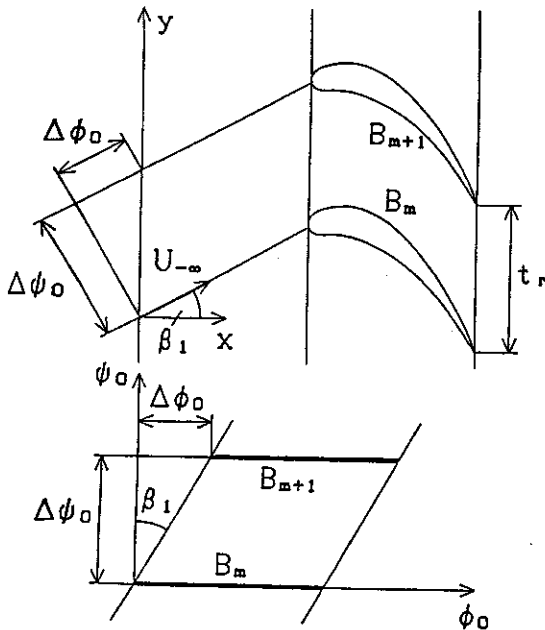


図3 周期変動流の位相関係説明図

となるから、式(45)に対し $\psi_0 \rightarrow \psi_s$ の極限を考えることにより、 β を決定するための方程式を得る。

$$\frac{\partial \beta}{\partial \psi_0} (\psi_0 - \psi_s) + \beta (1 - ik_s \alpha_0) = \left(A_n + A_s \frac{\partial g}{\partial \psi_0} \right) \quad (46)$$

よって、 β は次のような形で与えられる。

$$\beta = \frac{\overline{A_n}}{1 - ik_s \alpha_0} + \frac{A_s}{ik_s (1 - ik_s \alpha_0)} \cdot \frac{1}{(\psi_0 - \psi_s)} \quad (47)$$

また、翼面上境界条件は、

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \psi_0} = 0 \quad (48)$$

となる。なお、 β は既知量のみで決定されるため、 $\tilde{\phi}$ は既知関数とみなせる。物体表面上 ($\psi_0 \rightarrow \psi_s$) の ψ_s については、その境界条件を考えると、結局

$$\frac{\partial \phi}{\partial \psi_0} = -\overline{A_n} \quad (49)$$

となり、 $\psi_0 \rightarrow \psi_s$ の場合と同様の議論が可能である。よって補正ポテンシャル $\tilde{\phi}$ を導入することにより、問題は残りのポテンシャル $\hat{\phi}$ を境界条件(48)で解くことに帰着され、よどみ点以降翼面に沿って残るドリフト関数の特異性による翼面上境界条件への影響を取り除くことができた。

3.2 $F(\psi_0)$ に対する条件 $F(\psi_0)$ は $\psi_0 \rightarrow \psi_s$ で $F(\psi_0) \rightarrow \psi_0 - \psi_s$ という挙動を示す任意関数であるが、この他に翼間の周期性条件を満足する必要がある。図3の翼列において、 B_{m+1} に対して B_m の位相 σ は

$$\begin{aligned} \sigma &= -k_s \Delta \phi_0 + k_n \Delta \psi_0 \\ &= \frac{k_y t_r}{\cos \lambda_s} \cos(\lambda_m + \beta_1) = k_y t_r \end{aligned} \quad (50)$$

となる。よって、

$$\sigma = 2\pi \frac{t_r}{t_s} \quad (51)$$

周期性の条件は、

$$\exp(i\alpha)_{(B)_m} = \exp(i\alpha)_{(B)_{m+1}} \exp(-i\sigma), \quad u_{(B)_m} = u_{(B)_{m+1}} \exp(-i\sigma)$$

であり、結局、

$$\beta(\psi_0 + \Delta \psi_0) F(\psi_0 + \Delta \psi_0) = \beta(\psi_0) F(\psi_0) \quad (52)$$

が成立する。 $F(\psi_0)$ はこの周期性を満足しなければならない。即ち、 $F(\psi_0)$ は $\psi_0 \rightarrow \psi_s$ で $\psi_0 - \psi_s$ を満足し、かつ周期性を満足することが要求される。これら2つの条件を満足する関数として次式を与える。

$$F(\psi_0) = \left[\sin \left(\frac{2\pi}{\Delta \psi_0} (\psi_0 - \psi_s) \right) \right] \cdot \frac{\Delta \psi_0}{2\pi} \quad (53)$$

(47)式に対し $\psi_0 \rightarrow \psi_s$ 時の $\partial \tilde{\phi} / \partial \psi_0$ に定数分の修正項を加えた後、式(44)(53)から次式が成立する。

$$\tilde{\phi} = \frac{e^{i\alpha}}{1 - i k_s a_0} \left[-(\bar{A}_n + C) \frac{\Delta \psi_0}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta \psi_0} (\phi_0 - \phi_s) \right) + \frac{A_s^+}{i k_s} \right] \quad (54)$$

$$C = \frac{A_s}{1 - i k_s a_0} \left(\frac{k_n}{k_s} - \frac{\partial \bar{g}}{\partial \psi_0} \right) \quad (55)$$

ここで、 $\tilde{\phi}$ は翼面近傍での u_n^R の挙動に対して誘導され、また、 $\partial \bar{g} / \partial \psi_0$ および \bar{g} が $\psi_0 \rightarrow \psi_s^+$ の極限で意味をもつことから、これらを数値計算上の便宜を考慮して次のように書き換える。

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \psi_0} = \frac{\partial \bar{g}^+}{\partial \psi_0} \cos^2 \left(\frac{\Psi_0}{4} \right) + \frac{\partial \bar{g}^-}{\partial \psi_0} \sin^2 \left(\frac{\Psi_0}{4} \right) \quad (56)$$

$$\bar{g} = g - a_0 \ln \left[\frac{\Delta \psi_0}{2\pi} \sin(\Psi_0) \right], \quad \Psi = \frac{2\pi}{\Delta \psi_0} (\phi_0 - \phi_s) \quad (57)$$

上式(56)のように定義すると

$$\psi_0 \rightarrow \psi_s^+ \text{ の時 } \frac{\partial \bar{g}}{\partial \psi_0} = \frac{\partial \bar{g}^+}{\partial \psi_0}, \quad \psi_0 \rightarrow \psi_s^- \text{ の時 } \frac{\partial \bar{g}}{\partial \psi_0} = \frac{\partial \bar{g}^-}{\partial \psi_0}$$

となる。

4. じょう乱ポテンシャル

非定常じょう乱 ϕ の支配方程式(21)を $\phi_0 \psi_0$ 系に変換する。この結果、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{U_0^2 c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2 \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi_0 \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi_0^2} + \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{1}{c_0^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \\ & \frac{\partial M_0^2}{\partial \phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \phi_0} - \left\{ (1 - M_0^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi_0^2} + \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\rho_0^2 \frac{\partial \phi}{\partial \phi_0} \right) \right\} \quad (58) \\ & = \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{u_s}{U_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\rho_0 \frac{u_n}{U_0} \right) \end{aligned}$$

となる。この式をさらに変形し、式(44)および

$$\phi \Rightarrow \phi \exp(ikt), \quad u^R \Rightarrow u^R \exp[i(k t + \alpha)] \quad (59)$$

を代入すれば、結局、次式を得る。

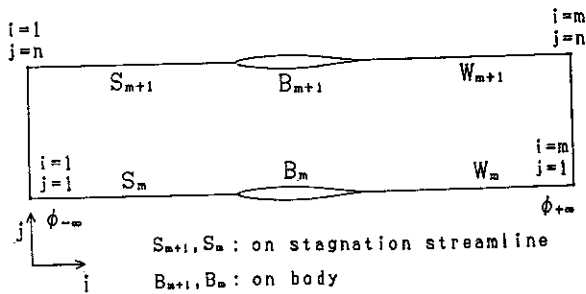


図4 境界条件指定位置

$$\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\beta_0^2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \psi_0} \right) - \frac{2ik}{c_0^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi_0} +$$

$$\frac{\tilde{\phi}}{c_0^2} \left[\frac{k_n^2}{U_0^2} + \frac{2ik \partial(\ln c_0)}{\partial \phi_0} \right] = -\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{U_\infty}{U_0} u_s \right) - \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\frac{U_\infty}{U_0} \frac{\rho_0}{\rho_0} u_n \right) \quad (60)$$

$$-G(\phi_0, \psi_0), \quad \beta_0^2 = 1 - M_0^2$$

ここで、

$$\begin{aligned} G(\phi_0, \psi_0) &= \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\beta_0^2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \psi_0} \right) - \frac{2ik}{c_0^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi_0} + \\ &+ \frac{1}{c_0^2} \left[\frac{k_n^2}{U_0^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial \phi_0} (\ln c_0) \right] \tilde{\phi} \quad (61) \end{aligned}$$

前章の結果から明かなように、補正ポテンシャル $\tilde{\phi}$ は定常流および上流側変動条件に関する既知量によって規定される既知関数であり、従って、式(60)は解くことができる。なお、 $\tilde{\phi}$ は翼面境界上での周期変動流の特異性を打ち消し、かつ周期境界条件を満足する以外は任意の関数であるが、その任意性の影響は、式(60)の吹出し項を通じて $\hat{\phi}$ に吸収され、それらの和としてのポテンシャル ϕ には影響を与えない。

5. 境界条件

図4の計算領域において、翼の後流 (W_m, W_{m+1}) および無限上流 ($\phi_0 = \phi_{-m}$)、下流 ($\phi_0 = \phi_m$) についての条件を考える。なお、上流側よどみ流線上 (S_m, S_{m+1}) では周期性の条件を満足すればよく、翼表面 (B_m, B_{m+1}) においては境界条件式(48)を満足すればよい。

(1) 後流上 (W_m, W_{m+1}) での条件

後流上では法線方向速度の連続性と圧力連続性を同時に満足しなければならない。図の W_m, W_{m+1} に対し法線速度の連続性より

$$u^+ \cdot \vec{n}_w = u^- \cdot \vec{n}_w \quad (62)$$

が成り立つ。後流が後縁からの坡点流線と一致すると仮定し、上式に非定常じょう乱速度 $u = u^R + \nabla \hat{\phi} + \nabla \tilde{\phi}$ を代入すると

$$u_n^+ + \frac{\partial \hat{\phi}^+}{\partial n_w} + \frac{\partial \tilde{\phi}^+}{\partial n_w} = u_n^- + \frac{\partial \hat{\phi}^-}{\partial n_w} + \frac{\partial \tilde{\phi}^-}{\partial n_w} \quad (63)$$

となる。ここで、式(41)と同様に、左辺第2項、右辺第2、3項を変形して、式(63)は次式となる。

$$u_n^+ + \left(\frac{\partial \hat{\phi}^+}{\partial \phi_0} + \frac{\partial \tilde{\phi}^+}{\partial \phi_0} \right) \rho_0 U_0 = u_n^- + \left(\frac{\partial \hat{\phi}^-}{\partial \phi_0} + \frac{\partial \tilde{\phi}^-}{\partial \phi_0} \right) \rho_0 U_0 \quad (64)$$

$\tilde{\phi}$ はその誘導の過程から明らかなように、 $\psi_0 \rightarrow \psi_s$ の極

限では $u_n + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \psi_0} \rightarrow 0$ となることから、後流での速度の連続性による条件は次のように表される。

$$\frac{\partial \hat{\phi}^+}{\partial \phi_0}(\phi_0, \psi_0) - \frac{\partial \hat{\phi}^-}{\partial \phi_0}(\phi_0 + \Delta\phi_0 - \Gamma, \psi_0 + \Delta\psi_0) e^{i\sigma} = 0 \quad (65)$$

ここで、 Γ は翼まわりの定常循環である。なお、スタガのない翼列の場合において、上式は

$$\frac{\partial \hat{\phi}^+(\phi, \psi)}{\partial \psi_0} - \frac{\partial \hat{\phi}^-(\phi, \psi)}{\partial \psi_0} \exp(i\sigma) = 0 \quad (66)$$

と表される。

一方、後流上の圧力の連続性に式(17)を適用すると

$$\frac{D_0}{Dt}(\hat{\phi}^+ - \hat{\phi}^-) + \frac{D_0}{Dt}(\tilde{\phi}^+ - \tilde{\phi}^-) = 0 \quad (67)$$

ここで、 $\psi_0 \rightarrow \psi_0$ のとき、 $\tilde{\phi}$ の引数の関係から

$$\frac{D_0}{Dt} \tilde{\phi} = 0$$

となるから、式(67)は結局、次のように表される。

$$jk(\hat{\phi}^+ - \hat{\phi}^-) + U_0 \frac{\partial}{\partial \phi_0}(\hat{\phi}^+ - \hat{\phi}^-) = 0 \quad (68)$$

$\hat{\phi}^+$ 、 $\hat{\phi}^-$ は、図4に示される W_∞ 上の値である。

(2) 無限上流、下流の条件

無限上流 ($\phi_0 \rightarrow -\infty$) に対しては、

$$U_0 \rightarrow 1, M_0^2 \rightarrow M_0^2, c_0 \rightarrow \text{const.}, \rho_0 \rightarrow \rho_\infty$$

となり、非定常じょう乱の渦あり速度 u^R は、

$$\nabla \cdot (\rho_0 u^R) \rightarrow 0$$

であることから、式(60)は次のように表される。

$$\begin{aligned} \beta_\infty^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \phi_0^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \phi_0^2} - \frac{2ik}{c_\infty^2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} + \frac{k^2}{c_\infty^2} \hat{\phi} \\ = - \left(\beta_\infty^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \phi_0^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \phi_0^2} + \frac{k^2}{c_\infty^2} \tilde{\phi} - \frac{2ik}{c_\infty^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi_0} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

従って、上流側の条件は、

$$\hat{\phi} \rightarrow -\tilde{\phi} + \hat{\phi}_\infty^H \quad (70)$$

となる。ここで、 $\hat{\phi}_\infty^H$ は次式で与えられる同次方程式の解である。

$$L_\infty(\hat{\phi}) = \left(\beta_\infty^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} - \frac{2ik}{c_\infty^2} \frac{\partial}{\partial \phi_0} + \frac{k^2}{c_\infty^2} \right) \hat{\phi} = 0 \quad (71)$$

一方、無限下流では、

$$U_0 \rightarrow U_2, M_0 \rightarrow M_2, c_0 \rightarrow c_2$$

$$\hat{\phi} \rightarrow -\tilde{\phi} + \hat{\phi}_\infty^H \quad (72)$$

$\hat{\phi}_\infty^H$ は次の非斉次方程式の解である。

$$\begin{aligned} L_{+\infty}(\hat{\phi}) = - \frac{1}{U_2} \left(\frac{\partial u_t}{\partial \phi_0} + \rho_2 \frac{\partial u_n}{\partial \phi_0} \right) - L_{+\infty}(\tilde{\phi}) \\ L_{+\infty} \equiv \beta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + \rho_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} - \frac{2ik}{c_2^2} \frac{\partial}{\partial \phi_0} + \frac{k^2}{c_2^2 U_2^2} \end{aligned} \quad (73)$$

6. 非圧縮流

6.1 非定常じょう乱渦あり速度 非圧縮性流体を考える。式(27)(28)より、 $u = (u_s^R, u_n^R)$ は次式となる。

$$\frac{u_s^R}{U_\infty} = \frac{1}{U_0} A_s e^{i(kx + \sigma t)} \quad (74)$$

$$\frac{u_n^R}{U_\infty} = U_0 \left(A_n + A_s \frac{\partial g}{\partial \psi_0} \right) e^{i(kx + \sigma t)} \quad (75)$$

$$\alpha = -k, \phi_0 - k, g(\phi_0, \psi_0) + k_n \psi_0, g = \int_{-\infty}^{\psi_0} \left(\frac{U^2}{U_0^2} - 1 \right) d\phi_0 \quad (76)$$

6.2 じょう乱ポテンシャル 非定常じょう乱ポテンシャル ϕ を支配する方程式は式(21)より

$$\nabla^2 \cdot \phi = -\nabla \cdot u^R \quad (77)$$

という Poisson の式となる。ここで、式(44)を代入すると

$$\nabla^2(\hat{\phi} + \tilde{\phi}) = -\nabla \cdot u^R \quad (78)$$

で表され、上式を $\phi_0 \phi_0$ 系へ座標変換すると、

$$\nabla^2 \phi = U_0^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi_0^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi_0^2} \right], \quad \phi = \hat{\phi} + \tilde{\phi} \quad (79)$$

$$\nabla \cdot u^R = U_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{u_s}{U_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\frac{u_n}{U_0} \right) \right] \quad (80)$$

と示される。結局、非圧縮流に対して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \phi_0^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \psi_0^2} = - \left[\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{u_s}{U_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\frac{u_n}{U_0} \right) \right] \\ - \left[\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \phi_0^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \psi_0^2} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

上式を前述の境界条件で解くことにより非定常ポテンシャル ϕ が決定される。

7. 数値計算例

7.1 概要 図5のように、上流側周期変動流が翼間流路内に流入する流れ場を扱う。なお、本報では解析法の有効性を確認するため、非圧縮流中のスタガのない翼列(NACA0024)にのみ計算対象を限定する。非圧縮性流体の場合の波動方程式は、式(77)に示すように Poisson の式となり、楕円型方程式の解法がそのまま使える。今回は計算手法として、非圧縮流に関する Poisson の式を中心差分により離散化し、これに前述の境界条件を含めた形でSOR法を用いて解く。収束判定条件は格子点上での残

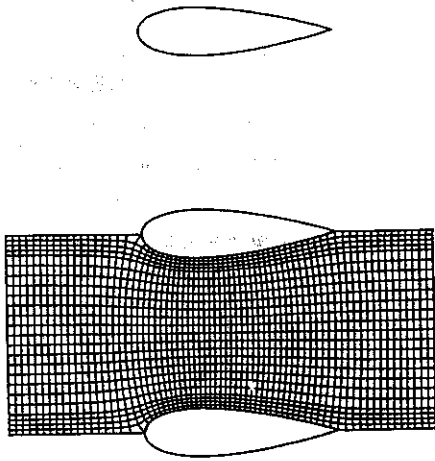


図5 計算対象翼列および計算格子 (NACA0024)

表1 係数(α_0)の計算例

pitch (t_r/C)	1	5	100	exact
cylinder row			0.252	0.250
NACA0012 ($R=1.58\%$)	0.0129	0.0134	-	-
NACA0015 ($R=2.48\%$)	0.0182	0.0190	-	-
NACA0018 ($R=3.58\%$)	0.0241	0.0254	-	-
NACA0021 ($R=4.85\%$)	0.0306	0.0325	-	-
NACA0024 ($R=6.33\%$)	0.0375	0.0403	-	-

差の最大値 10^{-4} 以下とした(詳細は省略⁽⁹⁾)。なお、今回の計算は全てパーソナルコンピュータ(PC9801RA21、クロック周波数20MHz、数値演算コプロセッサ Intel80387付)を使用しており、非定常流解析に要する計算時間は一〜二時間程度である。

7.2 格子形成 ϕ_0, ψ_0 座標系に対応する格子形成には、任意翼形を過ぎるポテンシャル流における流線および等ポテンシャル線を既存のプログラム⁽¹⁰⁾により決定し、その交点を格子点とした(格子点数は 71×25)。計算領域入口および出口面は、速度がほぼ一様となったところにとっている。用いたコードは特異点法を使用しており、従ってLaplaceの方程式の境界値問題を解くことと同等である。格子形成上特に注意しなければならない点は、翼表面近傍での格子点の扱いである。先に述べたように物体面の近くでは、 $\phi_0 \rightarrow \psi_0$ のときに渦あり速度の特異性を抑えるように補正ポテンシャル $\tilde{\phi}$ は作用するが、数値計算上でそれが有効に働くためには境界上での差分の精度をあげると同時に、ドリフト関数の格子点上の値を慎重に取り扱わなければならない。そこで、物体面近傍での格子点を図5のように密に配置する。

7.3 ドリフト関数の特異性 式(37)の対数的特異性の係数 α_0 は、翼前縁での法線方向の速度勾配から決定されるが、これを直接求めることは容易ではない。そこで、翼前縁部を円柱(半径 R)で近似し、その近傍の流れを

局所円柱座標系で表す。このとき、流れ場を表すLaplace方程式がよどみ点においても成立すると考えると、

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta^2} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \left(\therefore \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = 0 \right) \quad (82)$$

となることから、係数 α_0 は結局次式で計算される。

$$\alpha_0 = - \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)_{\text{よどみ点}} \quad (83)$$

ここで式(83)右辺は、接線方向速度 u_r をよどみ点まわり定常速度分布の多項式近似で表すことにより評価する。

表1に円柱列および翼列(NACA0012~0024)の例について計算した係数 α_0 を示す。円柱列(ピッチ100C、C:円柱径)は単独円柱の場合とみなせ、この場合の厳密解($\alpha_0 = -0.25$)との比較ができるが、比較の結果、式(83)から数値的に求めた係数 α_0 が厳密解に十分近いことがわかる。翼列の場合、前縁半径の増加にともない係数 α_0 の大きさもほぼ直線的に増加すること、また、翼列ピッチの大きい方が係数 α_0 の絶対値も大きいことがわかる。

図6に、翼間流路内のドリフト関数値(タイムライン)を示す(翼面上の値は補間して与えている)。翼前縁でのタイムラインの歪みが翼面近くに残っており、周期変動流に強く影響することが予想される。

7.4 非定常特性 翼面上非定常圧力分布は式(17)から計算される。 ϕ_0, ψ_0 系での表示では次のようになる。

$$C_p = \frac{p}{\rho_0 W^2 |A| / W^2 e^{i\alpha_0}} = - \left(j k \phi + U^2 \frac{\partial \phi}{\partial \phi_0} \right) \quad (84)$$

ここで、上式の微分を翼前縁、後縁では片側差分、それ以外では中心差分で評価する。この際、格子点上でじょう乱ポテンシャルが離散化された状態そのままでは、ポテンシャルが有する周期変動特性の空間的捕捉で数値誤差が生じ、圧力算出に少なからぬ影響を与える。そこで、

$$\phi = (\phi / e^{i\alpha_0}) e^{i\alpha_0} = \phi' e^{i\alpha_0} \quad (85)$$

とおき、 $\partial g / \partial \phi_0 = 1 / U^2$ および $k = k_0$ となることを利用し、結局次式で圧力分布を算出する。

$$C_p = U^2 \frac{\partial \phi'}{\partial \phi_0} e^{i\alpha_0} \quad (86)$$

図7には、NACA0024(ピッチ比 $t_r/C = 0.5$)の非定常圧力差分布($\Delta C_p = C_{p, \text{pressure}} - C_{p, \text{suction}}$)について、本手法(F-K法)と著者の一人が先に開発した特異点による解法(N-F法)⁽¹¹⁾との比較を示す。なお、F-K法については、流れ方向の格子間隔($\delta \phi_0$)の影響を調べるために、二種類の格子間隔($\delta \phi_0 = 0.035$: fine / $\delta \phi_0 = 0.044$: coarse)で計算している。格子間隔は翼前縁の近傍での圧力差分布に若干の影響を与えているが、それ以外ではほぼ同じ結果となることがわかる。また、F-K法とN-F法との比較から、全般的には両者の解法による圧力差分布は振幅値、位相に関してほぼ類似の結果となっているが、振幅値については翼前縁から $x/C \sim 0.4$ に

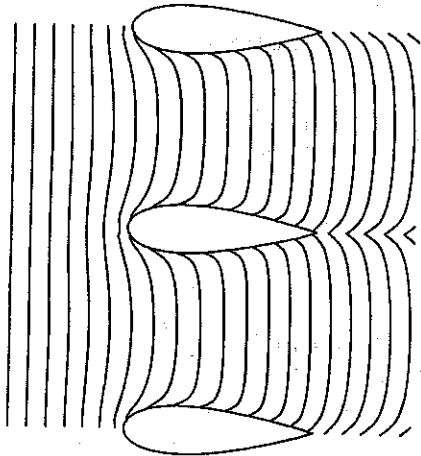


図6 ドリフト関数値 (タイムライン)

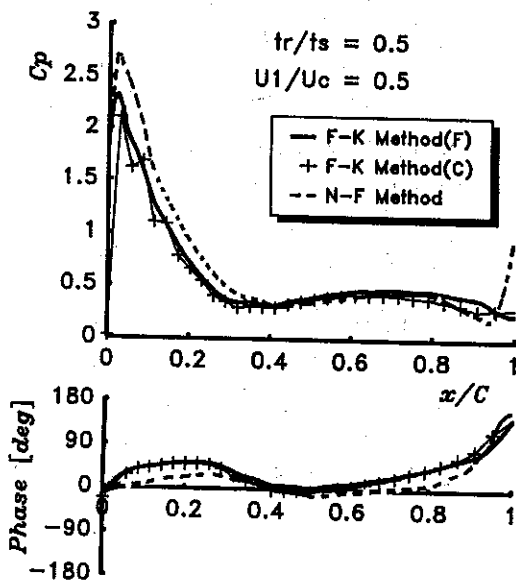


図7 非定常圧力差分布
(上: 振幅値、下: 位相)

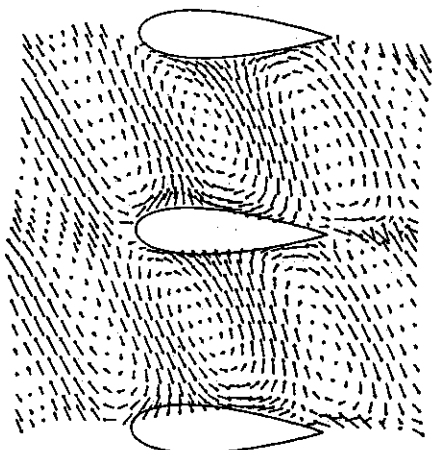


図8 非定常じょう乱速度ベクトル

かけて N-F 法が若干大きな値を与えており、また位相については F-K 法による結果が幾分進み側となっている。計算精度については、前縁半径の大きな翼の実験値等がなく検証できないので、今後実験等を行う計画である。図8に非定常じょう乱速度ベクトル $u = u^R + \nabla \phi + \nabla \psi$ を示す。上流側からの周期変動流が翼列との干渉により変形し、翼間流路内に渦構造が発生しているのが確認される。図8の非定常速度ベクトルはほぼ境界条件を満足していることが確認されるが、一部不十分な箇所が認められるので、今後計算コードの改良を行い、信頼性の向上を図る。

8. 結言

Goldstein が示した鈍頭物体まわりの非定常流に関する線形解析法を基に、翼前縁半径が大きな翼列の後流に対する圧縮流非定常応答解析法の理論展開を行った。特に、Goldstein 法で問題となる、非定常渦あり変動速度の翼よどみ点以降での特異性、およびそれによる翼面境界条件不定性の点について、その特異性を打ち消す修正ポテンシャルを導入することで問題の解決を図った。

数値計算例として、最も単純な非圧縮流の場合を取り上げ、既存の解法との比較を行い、解析法の特徴と有効性を検討した。

本研究の研究費の一部は文部省科学研究費奨励研究(A) (02750108) の助成を受けた。本研究の遂行にあたっては、本学大学院生二瓶晃一君、目黒俊勝君、山野辺寛君の協力を得た。また、Whitehead 博士 (元Cambridge大)、児玉秀和氏 (IHI) からは、本研究の契機となる議論をして戴いた。あわせてここに記し、謝意を表す。

文献

- (1) 西山、船崎、機論、50-454、B(1984)、1476
- (2) 船崎、機論、57-537、B(1991)、1645
- (3) Caruthers, J. E., Proc. 2nd Int'l Symp. on Aeroelasticity in Turbomachines(1981), 31
- (4) Goldstein, M. E., J. Fluid Mech., 89(1978), 433
- (5) Kerschen, E. J. and Balsa, T. P., AIAA J., 19-10 (1981), 1367
- (6) Lighthill, M. J., J. Fluid Mech., 1(1956), 31
- (7) Cargill, A. M., Proc. 4th Int'l Symp. on Aeroelasticity in Turbomachines and propellers (1984)
- (8) Atassi, H. M. and Grzedzinski, J., J. Fluid Mech., 209(1989), 385
- (9) 角館、岩手大学大学院修士論文(1991)
- (10) 西山、船崎、機論、52-485、B(1986)、3495