

前縁半径の大きな場合の非定常翼列応答解析法の開発*
(第2報, 非圧縮流中における非定常応答解析)

船崎 健一*¹, 二瓶 晃一*²
佐々木 淳*³, 渡邊 喬*¹

A New Technique for Analysis of Unsteady Aerodynamic Responses of Cascade Airfoils with Blunt Leading Edge
(Unsteady Aerodynamic Responses of the Cascade in Incompressible Flow)

Ken-ichi FUNAZAKI, Kouichi NIHEI,
Atsushi SASAKI and Takashi WATANABE

Unsteady aerodynamic responses of cascade airfoils with a blunt leading edge, which are subjected to incident rotational and irrotational fluctuations, are analyzed by use of the method developed in the previous paper of Funazaki and Kakudate. Since some difficulties in the imposition of the boundary condition have been pointed out in that paper, most of the efforts in this study are devoted to refinement of the method of the boundary condition imposition on the inlet/outlet and periodic boundaries by employing the analytical solutions in the upstream/downstream far-fields. Although the method presented in this paper could be applied to compressible flow problems, numerical examples employed this time are limited to incompressible flow cases. Obtained results then show the usefulness of the method, and also reveal some of the notable features of the unsteady flow field induced within the blade-to-blade passage vividly.

Key Words: Unsteady Flow, Cascade, Wake, Blunt Leading Edge, SOR Method

1. 緒 言

前報において著者の一人は、前縁半径の大きな翼から構成される翼列の、エントロピ(温度)変動を含む変動流に対する非定常応答を解析するための手法を提示した⁽¹⁾。そこでは、Goldstein⁽²⁾によって提唱された非定常流解析法を基に理論を展開し、特に、Goldstein法で問題となる境界条件の不定性という問題点を、補正ポテンシャルの導入により回避することに成功した。Goldsteinの手法を用いた研究としては、前報とほぼ同時期に発表されたCaruthers and Dalton⁽³⁾の研究があるが、彼らは翼前縁近傍での特異性が弱い圧縮機翼列を対象としているため補正ポテンシャルの導入は行っていない。また、Hall and Verdon⁽⁴⁾によって発表された手法は、前報と同様に補正ポテンシャルを導入しているが、解析法の信頼性向上のためさらに改良が必要とされている。

本報告では、前報の理論展開に引き続き、前縁半径の大きな翼列の後流に対する非定常応答に関する数値解析を行い、その非定常流れ場の特徴を明らかにする。本手法では等ポテンシャル線と流線から構成される計算格子を使用する関係上、特に周期境界条件を付課する点で難点が生ずる。そこで、本研究では、無限遠方解を用いて周期境界条件および上下流境界条件を付課する方法について検討を加え、さらに、非圧縮流の場合の境界条件について、その簡易的な取扱い手法についても考察した。

主な記号

- A : 上流側じょう乱速度
- C : 翼弦長
- c_0 : 定常流の音速
- c_p : 定圧比熱
- g : ドリフト関数
- i : 虚数単位
- \vec{i}, \vec{j} : x, y方向の単位ベクトル
- \vec{k} : 波数ベクトル ($= (k_x, k_y)$ or $= (k_s, k_n)$)
- k : 無次元振動数 ($= 2\pi \frac{C}{l_r} \frac{t_r}{l_s} \frac{U_c}{W_1}$)
- M_0 : マッハ数
- \vec{n} : ϕ_0 方向の単位ベクトル
- p : 非定常じょう乱圧力

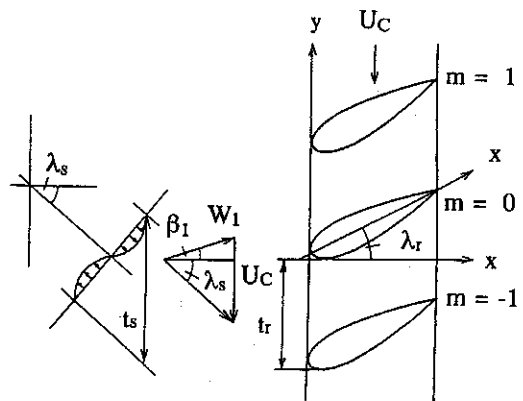


図1 周期変動流中の翼列(翼列配置と座標系)

* 原稿受付 平成4年6月1日。
*¹ 正員, 岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5).
*² 正員, (株)日立製作所 (〒317 日立市幸町2-1-1).
*³ 岩手大学研究生.

- \vec{s} : ϕ_0 方向の単位ベクトル
- S : エントロピー
- t_r/t_s : 動, 静翼列のピッチ比
- U_0 : 定常流速度
- u : 非定常じょう乱速度
- u^R : 非定常じょう乱渦あり速度
- β_0 : $= \sqrt{1-M_0^2}$
- β_1 : 流入角
- λ_s : 静翼列絶対流出角
- ρ_0, ρ : 定常, 非定常じょう乱密度
- σ : 翼間位相差 ($= 2\pi t_r/t_s$)
- ϕ : 非定常じょう乱ポテンシャル
- ϕ_0 : 定常速度ポテンシャル
- $\hat{\phi}, \tilde{\phi}$: 修正, 補正じょう乱ポテンシャル
- $\Delta\phi_0$: 隣接翼間流路間のポテンシャルジャンプ
- ϕ_0 : 流線関数
- $\Delta\phi_0$: 隣接翼間の流線関数の差

添字

- s : ϕ_0 方向の成分 n : ϕ_0 方向の成分
- o : 定常流成分
- $-\infty/1$: 上流側 $\infty/2$: 下流側

2. 基礎式

解析法の詳細は前報に譲り, 以下にはその概要を示す。

2.1 支配方程式 流れ場を非粘性流と仮定する。流れの諸量を定常流成分と非定常流成分とに分け, 非定常じょう乱が定常流成分と比して微小であると仮定すると, 非定常流成分に関する連続の式, 運動量の式およびエネルギー式は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U_0 + \rho_0 u) = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \left[\frac{D_0 u}{Dt} + (u \cdot \nabla) U_0 \right] + \rho (U_0 \cdot \nabla) U_0 = -\nabla p \quad (2)$$

$$\frac{D_0 S}{Dt} = 0, \quad \frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla \quad (3)$$

Goldstein⁽⁴⁾の提案に従い, 非定常じょう乱速度 u を渦ありと渦なしの和として次のように表す。

$$u = u^R + \nabla \phi \quad (4) \quad u^R = \frac{S}{2c_p} U_0 + u^{(H)} \quad (5)$$

ここで, $u^{(H)}$ は次の同次の輸送方程式から決定される速度成分である。

$$\frac{D_0 u^{(H)}}{Dt} + (u^{(H)} \cdot \nabla) U_0 = 0 \quad (6)$$

また圧力変動 p は, 非定常ポテンシャル ϕ を用いて

$$p = -\rho_0 \frac{D_0 \phi}{Dt} \quad (7)$$

で与えられる。結局, 非定常ポテンシャル ϕ を支配する波動方程式は, 式(2), (4), (7)より次のように示される。

$$\frac{D_0}{Dt} \left[\frac{1}{c_p^2} \frac{D_0 \phi}{Dt} \right] - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \phi) = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 u^R) \quad (8)$$

式(5), (6)より非定常じょう乱渦あり速度 u^R を求め, 式(8)から非定常じょう乱ポテンシャル ϕ を求めることによって, 流れ場の非定常じょう乱速度 u を決定できる。

なお, 速度は翼列入口速度 W_1 で, 長さは翼弦長 C で, 密度は翼列入口密度 ρ_0 でそれぞれ無次元化されているものとし, 以後用いる変数等は全て無次元量であるとする。

2.2 非定常渦あり速度 式(6)は, 座標系を (x, y) 系から定常流の等ポテンシャル線-流線からなる (ϕ_0, ψ_0) 系へ写像することにより, 容易に積分される⁽⁵⁾。ここで,

$$u^{(H)} = u_s^{(H)} \vec{s} + u_n^{(H)} \vec{n} \quad (9) \quad U_0 = U_0 \vec{s} \quad (10)$$

において, 式(5)を考慮することにより, 結局渦あり速度 u^R が次式で与えられる。

$$u_s^R = \left[\frac{A_s^2}{U_0} + s_{-\infty} U_0 \right] \exp(i a') \quad (11)$$

$$u_n^R = \rho_0 U_0 \left[A_n + A_s^2 \frac{\partial g}{\partial \phi_0} \right] \exp(i a') \quad (12)$$

$$A_s^2 = A_s - s_{-\infty}$$

$$a' = -k_s \phi - k_n g(\phi_0, \psi_0) + k_n \psi_0 + k t \equiv a + k t \quad (13)$$

ここで, $g(\phi_0, \psi_0)$ はドリフト関数⁽⁶⁾で, 次式で与えられる。

$$g(\phi_0, \psi_0) = \int_{-\infty}^{\psi_0} \left(\frac{1}{U_0 \hat{g}(\phi_0, \psi_0)} - 1 \right) d\psi_0 \quad (14)$$

2.3 補正ポテンシャルの導入 ドリフト関数 g は鈍頭物体回りの流れではよどみ点の存在により, よどみ点下流では $\psi_0 \rightarrow \hat{\psi}_0$ ($\hat{\psi}_0$ よどみ流線) で対数的特異性を示し⁽⁷⁾⁽⁸⁾, これより, 翼面上での非定常じょう乱渦あり速度 u_n^R 発散による翼面上境界条件の不定性という問題が起こる。前報においては, この渦あり速度の翼面近傍での特異的な挙動を考慮し, 特異性を打ち消すための補正ポテンシャル $\tilde{\phi}$ を導入した⁽¹⁾。

ここで, 非定常じょう乱ポテンシャル ϕ を

$$\phi = \hat{\phi} + \tilde{\phi} \quad (15)$$

と表すと, $\tilde{\phi}$ は次式で与えられる。

$$\tilde{\phi} = \frac{e^{i a}}{1 - i k_s a_0} \left[- (A_n + C) \frac{\Delta \phi_0}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta \phi_0} (\phi_0 - \hat{\phi}_s) \right) + \frac{A_s^2}{i k_s} \right] \quad (16)$$

$$C = \frac{A_s}{1 - i k_s a_0} \left(\frac{k_n}{k_s} - \frac{\partial \bar{g}}{\partial \phi_0} \right) \quad (17) \quad a_0 = - \left(\frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_{stag}^{-1} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \phi_0} = \lim_{\phi_0 \rightarrow \hat{\phi}_0} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \phi_0} \cos^2 \left(\frac{\Psi_0}{4} \right) + \lim_{\phi_0 \rightarrow \hat{\phi}_0} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \phi_0} \sin^2 \left(\frac{\Psi_0}{4} \right) \quad (19)$$

$$\bar{g} = g - a_0 \ln \left[\frac{\Delta \phi_0}{2\pi} \sin(\Psi_0) \right], \quad \Psi_0 = \frac{2\pi}{\Delta \phi_0} (\phi_0 - \hat{\phi}_s) \quad (20)$$

$\tilde{\phi}$ は定常流によって決まることから既知関数とみなせる。非定常じょう乱 ϕ の支配方程式(8)を $\phi_0 \psi_0$ 系に変換し,

$$\phi \Rightarrow \hat{\phi} \exp(i k t), \quad u^R \Rightarrow \hat{u}^R \exp[i(k t + \alpha)] \quad (21)$$

および式(15)を代入すれば, 結局, 次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\beta_0^2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho_s^2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \psi_0} \right) - \frac{2 i k}{c_p^2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} +$$

$$\frac{\hat{\phi}}{c_1^2} \left[\frac{k_1^2}{U_1^2} + \frac{2ik \partial(\ln c_0)}{\partial \phi_0} \right] = -\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{U_\infty u_n}{U_0} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{U_\infty \rho_0}{U_0 \rho_\infty} u_n \right) - G(\phi_0, \phi_0), \quad \beta_1^2 = 1 - M_1^2 \quad (22)$$

$$G(\phi_0, \phi_0) = \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\beta_0^2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} \right) - \frac{2ik}{c_1^2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} + \frac{1}{c_1^2} \left[\frac{k_1^2}{U_1^2} + 2ik \frac{\partial(\ln c_0)}{\partial \phi_0} \right] \hat{\phi} \quad (23)$$

結局問題は、修正ポテンシャル $\hat{\phi}$ に関する非斉次波動方程式(22)を翼面上境界条件

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} = 0 \quad (24)$$

で解くことに帰着される。

3. 境界条件

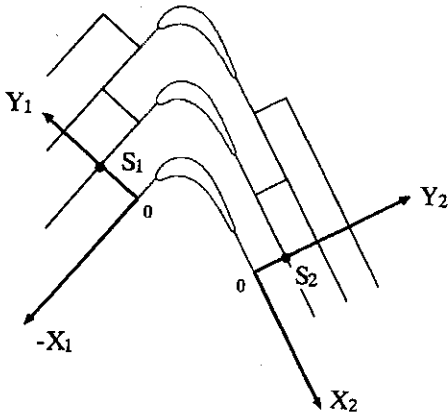
境界条件については前報に述べてあるが、上流側、下流側境界条件および周期境界条件について、本手法で用いる計算格子に固有の問題点があるので、以下に上記の境界条件の取扱い方について述べる。

3.1 上、下流境界条件

3.1.1 問題の定式化 翼列より十分に上流 ($-\infty$; 添字1)、下流 ($+\infty$; 添字2) では、定常流れ場が一樣になるとみなせるので、無限上流および無限下流でのじょう乱ポテンシャル $\hat{\phi}$ の支配方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\beta_{01}^2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} \right) - \frac{2ik}{c_{11}^2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} + \frac{k_1^2}{c_{11}^2} \hat{\phi} = \left[\beta_{11}^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{2ik}{c_{11}^2} \frac{\partial}{\partial \phi_0} + \frac{k_1^2}{c_{11}^2} \right] \hat{\phi} \equiv L_{-1} \hat{\phi} = -L_{-1} \tilde{\phi} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\beta_{02}^2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\rho_2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} \right) - \frac{2ik}{c_{22}^2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi_0} + \frac{k_2^2}{c_{22}^2} \hat{\phi}$$



$$S_1 = \beta_{01} \Delta \phi_0 \quad S_2 = \beta_{02} \Delta \phi_0 / \rho_2$$

図2 無限上流解および下流解を求めるための座標系

$$= \left[\beta_{22}^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{2ik}{c_{22}^2} \frac{\partial}{\partial \phi_0} + \frac{k_2^2}{c_{22}^2 U_2^2} \right] \hat{\phi} \equiv L_{+2} \hat{\phi} = -\frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{u_n}{U_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left(\frac{\rho_2 u_n}{U_2} \right) - L_{+2} \tilde{\phi} = -Q - L_{+2} \tilde{\phi} \quad (26)$$

以下、式(25)(26)から無限上流および無限下流での解を求める。なお、そこでの流れの一様性から、図2のような座標系を上流側、下流側に設定する。

3.1.2 無限下流解

3.1.2.1 Milse変換 始めに、無限下流での問題について考える。Milse変換を式(26)に対して行う。従属変数を $f(\phi_0, \phi_0)$ として、

$$f(\phi_0, \phi_0) = F(\phi_0, \phi_0) \exp \left(\frac{ik_2 M_2^2}{U_2^2 \beta_{22}^2} (\phi_0 - \phi_{02}) \right) \equiv F(\phi_0, \phi_0) \exp(i\Theta_2(\phi_0 - \phi_{02})) \quad (27)$$

とおき、さらに Prandtl-Glauert 変換

$$\xi = \phi_0, \quad \eta = \frac{\beta_{02}}{\rho_2} \phi_0 \quad (28)$$

を行う。これにより、若干の式変形の後、次式を得る。

$$L_{+2} \hat{\phi} = \left[\beta_{22}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \left[\frac{k_2^2}{c_{22}^2 U_2^2} + \frac{2k\Theta_2}{c_{22}^2} - \beta_{22}^2 \Theta_2^2 \right] \right] \hat{F} e^{i\Theta_2(\xi - \xi_2)} = \left[\beta_{22}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \tau_2^2 \right) \right] \hat{F} e^{i\Theta_2(\xi - \xi_2)}, \quad \tau_2^2 = \frac{k_2^2 M_2^2}{U_2^2 \beta_{22}^2} \equiv \beta_{22}^2 e^{i\Theta_2(\xi - \xi_2)} H_{+2} \hat{F}$$

ここで、

$$\hat{\phi} = \hat{F} e^{i\Theta_2(\xi - \xi_2)}, \quad H_{+2} \equiv \beta_{22}^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \tau_2^2 \right]$$

同様に、 $\tilde{\phi} = \tilde{F} e^{i\Theta_2(\xi - \xi_2)}$ とおくと、

$$L_{+2} \tilde{\phi} = \beta_{22}^2 e^{i\Theta_2 \xi} H_{+2} \tilde{F} \quad (30)$$

以上の結果から、式(26)は次のような形に変形される。

$$H_{+2} \hat{F} = -Q' - H_{+2} \tilde{F} \quad (31) \quad Q' = \frac{e^{-i\Theta_2(\xi - \xi_2)}}{\beta_{22}^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_n}{U_2} \right) + \frac{\beta_{02}}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho_2 u_n}{U_2} \right) \right\}$$

式(31)の解は、オペレータ H_{+2} の線形性から

$$\hat{F} = -\tilde{F} + \hat{F}^{(P)} + \hat{F}^{(H)} \quad (32)$$

とおくことができる。ここで、 $\hat{F}^{(P)}$ 、 $\hat{F}^{(H)}$ はそれぞれ

$$H_{+2} \hat{F}^{(P)} = -Q' \quad (33) \quad H_{+2} \hat{F}^{(H)} = 0 \quad (34)$$

を満足する解である。以下に、この二つの式の解法について考える。

3.1.2.2 特解 $\hat{F}^{(P)}$ (変数分離法)

翼列の十分下流では定常流関連の各諸量の値は変化しないと仮定すると、ドリフト関数は

$$g(\phi_0, \phi_0) = g(\phi_{02}, \phi_0) + \left(\frac{1}{U_2^2} - 1 \right) (\phi_0 - \phi_{02}) \quad (35)$$

となる。 $g(\phi_{02}, \phi_0) \equiv g_2(\phi_0)$ とおくと、式(33)から α は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \alpha &= -k_s \phi_{02} - k_s g_2(\phi_0) + k_n \phi_0 - k_s \frac{\phi_0 - \phi_{02}}{U_2^2} \quad (36) \\ &\equiv \bar{\alpha}_2(\phi_0) - k_s \frac{\phi_0 - \phi_{02}}{U_2^2} = \bar{\alpha}_2(\phi_0) - k_s \frac{\xi - \xi_2}{U_2^2} \end{aligned}$$

また、式(11)(12)は次のようになる。

$$\begin{aligned} u_s &= \left(\frac{A_s^+}{U_2} + s_{-} U_2 \right) e^{i\alpha} \equiv u_{s2} e^{-ik_s \frac{\xi - \xi_2}{U_2^2}} \quad (37) \\ u_n &= \rho_2 U_2 (A_n + A_s^+ \partial g_2 / \partial \phi_0) e^{i\alpha} \equiv u_{n2}(\phi_0) e^{-ik_s \frac{\xi - \xi_2}{U_2^2}} \end{aligned}$$

式(31)中の Q' は、式(36)を考慮し次のように表せる。

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{\bar{Q}(\phi_0(\eta))}{\beta \beta_2} e^{-i\Theta_2(\xi - \xi_2)} e^{-ik_s(\xi - \xi_2)/U_2^2} \quad (38) \\ &\equiv \bar{Q}_2(\eta) e^{-i(\Theta_2 + k_s/U_2^2)(\xi - \xi_2)} \end{aligned}$$

$\xi - \xi_2 = X_2$, $\eta = Y_2$ とおくと、式(38)は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_2^2} + \tau_2^2 \right) \hat{F} &= -\bar{Q}_2(Y_2) e^{-iTX_2} \quad (39) \\ T &= \Theta_2 + k_s/U_2^2 \end{aligned}$$

式(39)には吹出項 \bar{Q}_2 の各翼間流路ごとの位相差効果が考慮されていないので、これを考慮した形で式(40)右辺を次のように表す。

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &= -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{Q}_2(Y_2) e^{-iTX_2} e^{im\sigma_2} \bar{H}(Y_2, ms_2, (m+1)s_2) \\ &= -\bar{Q}_2(Y_2) e^{-iTX_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\sigma_2} \bar{H}(Y_2, ms_2, (m+1)s_2) \\ &\quad \sigma_2 = (\sigma + k_s \Delta \phi_{02}/U_2^2) \quad (40) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{H}(Y_2, ms_2, (m+1)s_2)$ は区分的 λ_{177} 関数で、

$$\bar{H}(Y_2, ms_2, (m+1)s_2) \equiv H(Y_2 - ms_2) - H(Y_2 - (m+1)s_2) \quad (41)$$

H : Heavisideの λ_{177} 関数

式(40)の総和について、Poissonの総和公式を用いて書き換えることにより、式(40)は次式になる(付録A)。

$$\nabla_{xy} \hat{F} = -\bar{Q}_2(Y_2) e^{-iTX_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_n Y_2/s_2} (1 - e^{-i\alpha_n})}{i\alpha_n} \quad (42)$$

$$\nabla_{xy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_2^2} + \tau_2^2 \right), \quad \alpha_n = \sigma_2 - 2\pi n$$

変数分離法により

$$\hat{F}^{(p)} = A(Y_2) e^{-iTX_2} \quad (43)$$

とおき、これを式(42)に代入する。さらに、 $\bar{Q}_2(Y_2)$ をピッチ方向にFourier展開することにより、結果として、 $A(Y_2)$ に関する次の二重級数展開表示を得る。

$$A(Y_2) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{i(\alpha_n + \beta_m) Y_2} \quad (44)$$

$$A_{mn} = \frac{B_n Q_m}{(\alpha_n + \beta_m)^2 + (T^2 - \tau_2^2)}$$

$$\alpha_n = \alpha_n'/s_2, \quad \beta_m = 2\pi m/s_2, \quad B_n = \frac{(1 - e^{-i\alpha_n'})}{i\alpha_n'}$$

$$Q_m = \frac{1}{s_2} \int_0^{s_2} \bar{Q}_2(y_2) e^{-i2\pi m y_2/s_2} dy_2$$

3.1.2.3 一般解 $\hat{F}^{(H)}$ 一般解 $\hat{F}^{(H)}$ は、後流上のポテンシャルジャンプに起因する不連続解 $\hat{F}^{(D)}$ と連続解(じょう乱成分) $\hat{F}^{(H)}$ とに分離される。

(a) 不連続解 $\hat{F}^{(D)}$ については、Verdonら⁽¹⁰⁾が既に解を得ている。これを基にすると、本論文での不連続解は、翼後縁での不連続量を $\hat{F}_2^- - \hat{F}_2^+$ として次のように表される。

$$\hat{F}^{(D)} = -\frac{\hat{F}_2^- - \hat{F}_2^+}{2} e^{-iTX_2} \times$$

$$\left\{ \frac{\exp\left(\frac{k_s Y_2}{\beta_{02} U_2^2}\right)}{1 - \exp\left[\frac{k_s s_2}{\beta_{02} U_2^2} - i\sigma'\right]} + \frac{\exp\left(-\frac{k_s Y_2}{\beta_{02} U_2^2}\right)}{1 - \exp\left[-\frac{k_s s_2}{\beta_{02} U_2^2} + i\sigma'\right]} \right\} \quad (45)$$

(b) 連続解 $\hat{F}^{(H)}$ として、

$$\hat{F}^{(H)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k^* e^{i(c_k^* X_2 + d_k^* Y_2)} \quad (46)$$

とおく。これを式(34)に代入し、結局次の関係式を得る。

$$-c_k^* - d_k^* + \tau_2^2 = 0 \quad (47)$$

修正位相差 σ_2' (式(40)参照)を考慮すると、

$$\begin{aligned} \hat{F}^{(H)}(Y_2 + s_2) &= \hat{F}^{(H)}(Y_2) e^{i\sigma_2'} \quad (48) \\ \therefore d_k^* &= \frac{\sigma_2' + 2\pi k}{s_2}, \quad c_k^* = \pm i\sqrt{d_k^*{}^2 - \tau_2^2} \end{aligned}$$

c_k^* の符号は、下流側でのじょう乱の条件(下流側からの入射条件、下流側への放射条件)によって選択される。また、式(46)の係数 g_k^* は、下流側境界での接続から決定される。式(32)を考慮すると、境界上では

$$\begin{aligned} \hat{F}^{(H)} &= \hat{F} + \tilde{F} - \hat{F}^{(p)} - \hat{F}^{(D)} \quad \text{on } X_2 = 0 \quad (49) \\ &\equiv \hat{F}^{(H)}(Y_2) \end{aligned}$$

が成立する。これより、

$$g_k^* = \frac{1}{s_2} \int_0^{s_2} \hat{F}^{(H)}(y) e^{-id_k^* y} dy \quad (50)$$

3.1.3 無限上流解 非定常渦あり速度による吹き出しが存在せず、また、後流渦による不連続が存在しないことから、無限上流解は式(25)から決定される。無限下流解と同様の変換を行い、結局、

$$\hat{\phi} = \hat{F} e^{i\Theta_1(\xi - \xi_1)}, \quad \tilde{\phi} = \tilde{F} e^{i\Theta_1(\xi - \xi_1)}, \quad \Theta_1 = \frac{k_s M_1^2}{U_1^2 \beta_{01}} \quad (51)$$

$$L_{-\infty} \hat{\phi} = \beta_{01} e^{i\Theta_1(\xi - \xi_1)} H_{-\infty} \hat{F} \quad (52)$$

$$L_{-\infty} \tilde{\phi} = \beta_{01} e^{i\Theta_1(\xi - \xi_1)} H_{-\infty} \tilde{F}$$

$$H_{-\infty} \equiv \beta_{01} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \tau_1^2 \right] \tau_1 = \frac{k_s^2 M_1^2}{U_1^2 \beta_{01}}$$

$$\hat{F} = -\tilde{F} + \hat{F}^{(H)} \quad (53)$$

ここで、

$$\hat{F}^{(H)} = g_k^* e^{i(c_k^* X + d_k^* Y)} \quad (54)$$

とおく。無限下流解の場合と同様に、次の関係式を得る。

$$-c_k^* - d_k^* + \tau_1^2 = 0$$

修正位相差 σ_1 を考慮すると、

$$\hat{F}^{(H)}(Y+\Delta Y_1) = \hat{F}^{(H)}(Y) e^{i\sigma_1} \quad (55)$$

$$\therefore d_{\bar{r}} = \frac{\sigma_1 + 2\pi k}{\Delta Y_1}, \quad c_{\bar{r}} = \pm i \sqrt{d_{\bar{r}}^2 - \tau^2}$$

$c_{\bar{r}}$ の符号は、上流側でのじょう乱の条件（上流側からの入射条件、上流側への放射条件）によって選択される。式(54)の係数 $g_{\bar{r}}$ は、上流側境界での接続から決定される。無限下流解の場合と同様に式(32)を考慮すると、境界上では次式が成立する。

$$\hat{F}_e^{(H)} = \hat{F} + \hat{F}^* \equiv \hat{F}^{(H)}(Y_1) \quad \text{on } X=X_1 \quad (56)$$

これより、

$$g_{\bar{r}} = \frac{1}{s_1} \int_{s_1}^{s_1} \hat{F}^{(H)}(y) e^{-id_{\bar{r}} y} dy \quad (57)$$

3.2 境界条件の与え方 本手法での計算に用いる格子は等ポテンシャル線および流線から構成され、実際の計算は写像された矩形直交格子で行われる。この際、計算格子の特性から、次の点の問題となる(図3, 5)。

- (1) 上下の周期境界上格子点の x 座標は通常は一致しないため、両者の間で直接的な周期境界条件を課することが困難であること。
- (2) 周期境界線上で、上下で対応する部分がない部分が発生すること。

この内、(1)については、周期境界上でのポテンシャル値の適当な補間操作により解決される。一方、(2)については、仮想的な格子点を適宜追加して、それらの点上でのポテンシャルを上記の解析解から与える必要がある。

なお、差分解と解析解とを接続する部分は、定常流が十分に一樣になる位置（翼弦長程度上流・下流）に設定する。

4. 数値計算

4.1 概要 本論文では、計算を非圧縮流 ($c_0 \rightarrow \infty$) に限定する。このとき、式(22)はポテンシャル ϕ に関する Poisson の式になり、これを離散化して、各種境界条件を含めた形で SOR法を適用して解く。収束判定条件は、格子点上での最大残差 10^{-4} 以下とした。離散化には、翼

○ points for the periodic boundary condition

▲ points for the inlet boundary condition

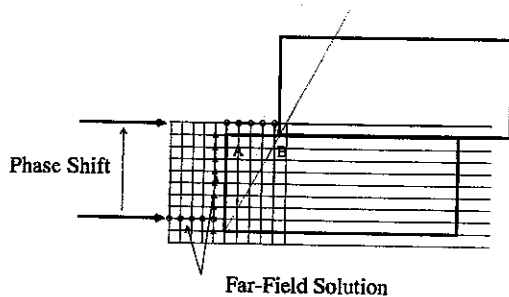


図3 写像された計算領域および境界条件

前縁および後縁を除き中心差分を用いた。なお、離散化の詳細、計算格子生成法、非定常圧力計算法等については前報等^{(1) (9)}に譲る。

計算はトランスピュータ（国際データシステム社、クロック周波数25MHz, 12.5MIPS）によって行った（ただし、並列計算は行っていない）。

4.2 境界条件 3章では無限上流・下流での解析解による周期境界ならびに上・下流境界条件指定法を提示したが、この場合、級数計算、補間計算が必要となり、結果として収束が遅くなる。そこで、厳密性は損なわれるが、下記のような簡易の取扱いを試みる。

- a) 上・下流側境界では、じょう乱圧力(式(7))がないとする。
- b) 周期境界上で対応する格子点がない点では、補外操作を行う。

結果としては、後述するように、本論文での非圧縮流に関する計算例では、厳密な取扱いおよび簡易の取扱いずれによっても翼面上圧力分布には大きな違いはなかった。

4.3 実験との比較 本手法の解析精度を検証するため、翼面上非定常圧力差 $Cf_{diff} = Cf_{pressure} - Cf_{suction}$ について、Fleeter等の実験⁽¹¹⁾での結果、Chiang-Fleeter法（局所解析解を用いた周期変動流に対する単独翼の非定常応答解析法）⁽¹²⁾による予測値および西山-船崎法（N-F法と略す）⁽¹³⁾による予測値を示す。ここで、実験では単独翼（翼断面：C4）を用いており、本手法およびN-F法はそのままでは計算できないため、計算では単独翼に近い状態が得られるピッチ比2.0、翼間位相差なしの条件で計算を行っている。また、境界条件は上述の簡易の取扱いを行っている。

図4に、以上の結果の比較を示す。予測値は、振幅分布、位相分布ともほぼ同様の結果になっているが、実験値との比較で見ると、本手法は実験値に最も近い予測値を与えることがわかる。ここでの比較の結果、本論文で提示した手法の有効性および既存の手法に対する優位性が示された。

4.4 数値計算例 図5に示す翼列（翼断面形状NACA0024, スタガ角 $\lambda_r = 30^\circ$, solidity 1, 流入角 $\beta_1 = 30^\circ$ ）を例に考察する。図5の格子点数は、流れ方向に81点、それに垂直方向に25点である（この計算格子を本論文での標準的格子とする）。この場合の流路内ドリフト関数分布（タイムライン）を図6に示す。ここで、翼面上の値は補外法で求めた。

図7には非定常速度ベクトルを示す ($U_\infty/W_1 = -2.0$, $t_w/t_r = 2.0$)。翼列上流での周期変動流が翼前縁で切断され、結果として、非定常速度ベクトルは翼前縁を迂回するように現れている。また、翼間流路内において、速度ベクトルが翼面に向かう付近では速度ベクトルは翼

面上で広がるように向きを変え、一方、速度ベクトルが翼面より離れる付近では、周囲の速度ベクトルはそこに束ねられる形になっている。その結果として、翼間流路内に一對の渦が発生していることがわかる。なお、図のベクトルは、境界条件に無限上流・下流解を用いた厳密な扱いの場合の結果である。

図8には非定常圧力差分布の比較を示す。ここでは、前述の境界条件についての取扱いを厳密にした場合と簡易的扱いをした場合との比較を行うため、図8には両者び後縁近傍で、振幅、位相ともわずかに異なるだけで、両者の結果はほぼ同じ値を与えている。また、非定常速度ベクトル図も差異は小さかった。

この結論をそのまま他の条件の場合にまで敷衍できないが、本論文で扱う非圧縮流の場合には、4.3節の結果を考慮すると、簡易的扱いでも十分であると考えられる。そこで、以下での計算では、計算時間の短さを考慮して境界条件の簡易的扱いを採用する。

また、図8には、N-F法とによる計算結果も併記してある。N-F法は全般的には本手法による結果に近い値を示しているが、翼前半部では高めの圧力差振幅を示している。

4.5 計算格子の影響 計算格子は任意に選択されるものであり、その任意性が計算精度に与える影響を把握しておく必要がある。格子密度の効果については一部前報で検討してあるので、ここでは、上・下流境界が標準の場合の結果を示してある。その結果、翼前縁近傍および格子(81x25)の場合より上流にある場合(95x25)または下流にある場合(101x25)の計算を行い、位置の影響を調べた。図9に3種類の計算格子についての非定常圧力差分布を示す。なお、3つの格子それぞれは格子数は異なるが、格子間隔はほぼ同じになるように設定されている。比較の結果、3つの格子で得られる値はほぼ一致することがわかる。ただし、位相にはわずかながら違

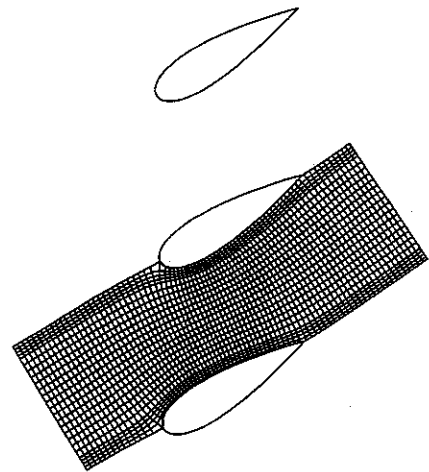


図5 計算格子(81x25)

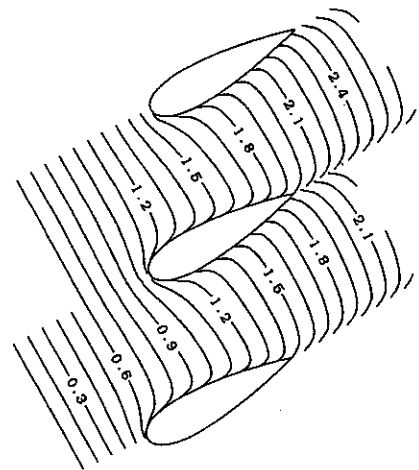


図6 タイムライン

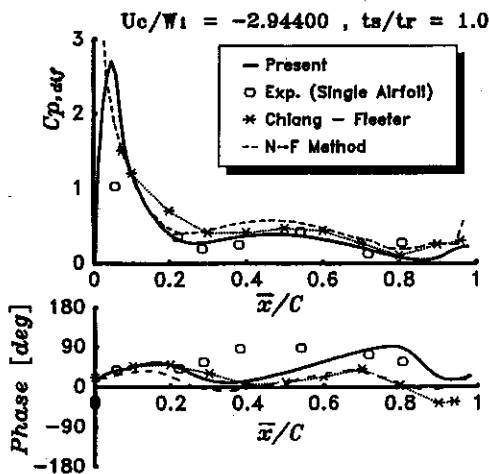


図4 圧縮機翼列における非定常圧力差分布に関する計算値及び実験値の比較

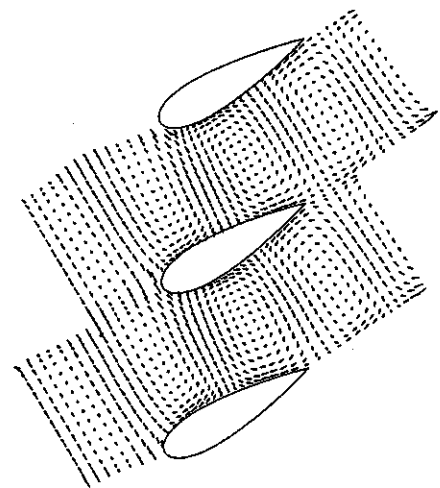


図7 非定常速度ベクトル (Uc/W1 = -2.0, ts/tr = 2.0)

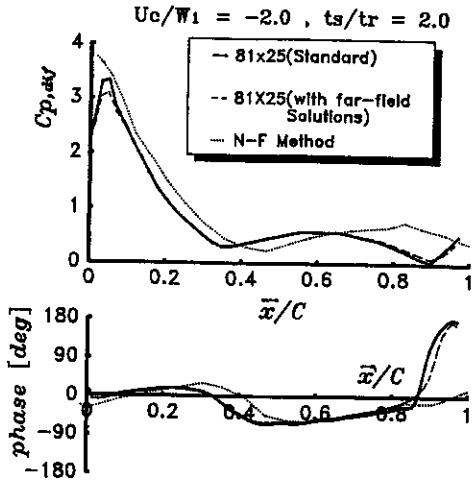


図8 非定常圧力差分布に及ぼす境界条件の取扱いの影響 ($U_c/W_1 = -2.0, t_s/t_r = 2.0$)

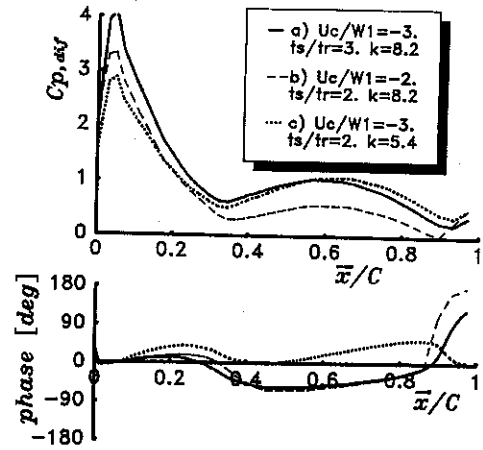


図10 非定常パラメータの効果

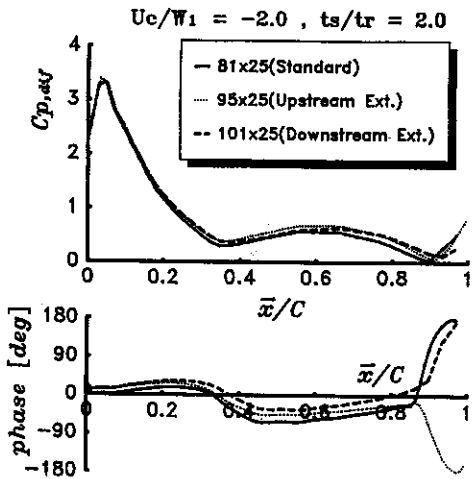


図9 上, 下流境界条件を与える位置の効果

いが見られ、数値計算上の誤差のほか、位相の基準（翼前縁付近で変動流振幅が最大となる時点）が計算上多少ずれることが関係していると思われる。

以上の検討の結果、非圧縮流での計算結果が上流、下流の境界条件を与える位置に大きくは依存しないことが確認された。ただし、圧縮流の場合に同様の結論になるかは不明であり、今後検討を行う。

また、図4、8および9の計算例の無次元周波数 k は実際のターボ機械内での後流通過周波数に相当しており、計算の結果から判断してそこで用いた格子はほぼ十分な密度であるものと考えられる。もちろん、高次のハーモニクスを扱う際にはより細かな格子が必要となる。

4.6 非定常パラメータの効果 図10には、非定常流を支配するパラメータ U_c/W_1 および t_s/t_r を変えた場合の非定常圧力差分布を示す。図中a)およびb)は、無次元周波数 k を一定に保ちながらパラメータを変更した場

合の結果で、両者は、変動流と翼弦とのなす角度 $\lambda (= \lambda_s + \lambda_r)$ および翼間位相差が異なる。この場合、無次元周波数が同じであるため、圧力差分布形状は似ているが、その振幅値はかなり違う。両者の λ はそれぞれ 101.6° と 93.4° であり、翼弦に垂直な変動速度成分の大きさに関しては大きな違いはないことから、翼間位相差が振幅値にとり支配的であることを表している。また、a)とc)とでは λ と k とがそれぞれ異なり、特に位相差分布の差異が明確になっている。またc)では翼前縁近傍では振幅値がa)よりも小さいが、翼後半部ではほぼ同程度の大きさになっている。以上のように、翼面上の圧力分布の決定には、様々なパラメータが複雑な形で関与していることがわかる。

5. 結言

前縁半径の大きな場合の非定常翼列応答解析法について、前報で提示した理論展開に引き続き、無限上流・下流解を用いた境界条件指定法を検討し、実験値ならびに既存の解析法との比較等を行った。その結果、本手法は既存の実験値に十分近い予測値を与えることが確認され、また、上流・下流および周期境界での境界条件について、簡易的な取扱いでも実用上問題ない程度の値を示すことがわかった。さらに、いくつかの非定常流パラメータに関する数値計算例を通じて、各種パラメータの効果を検討した。

参考文献

- (1) 船崎・角館, 機論, 58-547(1992), 86
- (2) Goldstein, M. E., J. Fluid Mech., 89(1978), 433
- (3) Caruthers, J. E. and Dalton, W. N., Trans. ASME Paper 91-GT-174, 1991
- (4) Hall, K. C. and Verdon, J. M., AIAA J., Vol. 29, No. 9, 1991, 1463
- (5) Kerschen, E. J. and Balsa, T. P., AIAA J., 19-10 (1981), 1367
- (6) Lighthill, M. J., J. Fluid Mech., 1(1956), 31(7)

- Cargill, A.M., Proc. 4th Int'l Symp. on Aero-elasticity in Turbomachines and propellers(1984)
- (8) Atassi, H.M. and Grzedzinski, J., J. Fluid Mech., 209(1989), 385
- (9) 二瓶, 岩手大学大学院工学研究科修士論文(1992)
- (10) Verdon, J.M. and Caspar, J.R., AIAA J., Vol.18, No.5, 1980, 540
- (11) Fleeter, S., Capece, V.R. and Chaing, H.D., AIAA J., Vol.28 No.6(1990), 1024
- (12) Chiang, H.D. and Fleeter, S., Int'l J. Math. Modeling (to be published)
- (13) 西山・船崎, 機論, 50-454, B(昭59), 1476

付録

式(41)の評価

Poisson の総和公式

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(ml) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{l}\right), \quad g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi\xi x} dx \quad (A.1)$$

に対して、 $l=1$ および

$$f(x) = e^{-i\sigma' x} H(Y, sx, sx+s), \quad a = \sigma + \frac{k_s \Delta \phi_0}{U_1^2} \quad (A.2)$$

を代入する。このとき、

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma' x} H(Y, sx, sx+s) e^{-i2\pi\xi x} dx = I_1 \text{ は}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Xi x} H(Y-sx) dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Xi x} H(Y-sx-s) dx$$

$$\equiv I_1 - I_2 \quad \Xi = \sigma' - 2\pi\xi$$

 $Y-sx=t$ として、次のように計算される。

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Xi(Y-t)/s} H(t) \left(-\frac{dt}{s}\right)$$

$$= \frac{e^{i\Xi Y/s}}{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Xi t/s} H(t) dt$$

ここで、Heavisideのステップ関数のFourier変換公式(付1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{i\xi} + \frac{\delta(\xi)}{2}, \quad \delta(\xi) : \delta\text{-関数} \quad (A.3)$$

を用いると、

$$I_1 = e^{i\Xi Y/s} \left[\frac{1}{i\left(\frac{\Xi}{s}\right)} + \frac{\delta\left(\frac{\Xi}{s}\right)}{2} \right] / s \quad (A.4)$$

 I_2 についても同様に、

$$I_2 = e^{i\Xi \frac{Y-s}{s}} \left[\frac{1}{i\left(\frac{\Xi}{s}\right)} + \frac{\delta\left(\frac{\Xi}{s}\right)}{2} \right] / s \quad (A.5)$$

$$\therefore g(\xi) = e^{i\Xi Y/s} \left[\frac{1}{i\left(\frac{\Xi}{s}\right)} + \frac{\delta\left(\frac{\Xi}{s}\right)}{2} \right] \frac{1 - e^{-i\Xi}}{s} \quad (A.6)$$

$$\therefore S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i a_n Y/s} \left[\frac{1}{i\left(\frac{a_n}{s}\right)} + \frac{\delta\left(\frac{a_n}{s}\right)}{2} \right] \frac{1 - e^{-i a_n}}{s} \quad (A.7)$$

$$a_n = \alpha - 2\pi n$$

式(A.7)は $a_n = \alpha - 2\pi n = 0$ となる場合には用いることができないが、その場合には各翼間流路の位相差がないことになるので(α が整数になるため)、総和形式を用いる必要がない。従って、以下では $a_n \neq 0$ の場合を考える。このとき、 $\delta(a_n) = 0$ となることから

$$\therefore S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i a_n Y/s} (1 - e^{-i a_n})}{i a_n} \quad (A.8)$$

(付1)今井, 応用超関数論II, 1981, サイエンス社, 424